CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MODELAGEM DINÂMICA E DE CONTROLE DE UM MECANISMO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA APLICAÇÃO EM UM ROBÔ HEXÁPODE

Djalma Demasi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Orientador:

Luciano Santos Constantin Raptopoulos

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2012

MODELAGEM DINÂMICA E DE CONTROLE DE UM MECANISMO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA APLICAÇÃO EM UM ROBÔ HEXÁPODE

Djalma Demasi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Aprovada por:

_____
Prof. Luciano Santos Constantin Raptopoulos, D. Sc. (Orientador)

_____
Prof. Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco, D. Sc.

_____
Prof. Max Suell Dutra, Dr.-Ing. (UFRJ)

_____
Prof. Vitor Ferreira Romano, Dott. Ric. (UFRJ)

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2012

CEFET/RJ/Sistema de Bibliotecas Phoenix/Uned de Nova Iguaçu

D372 Demasi, Djalma.
Modelagem dinâmica e de controle de um mecanismo de três graus de liberdade para aplicação em um robô hexápode / Djalma Demasi. – 2012.
126 f. : il. (algumas color.)

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2012.
Bibliografia: f. 111-122.
Orientador: Prof. Dr. Luciano Santos Constantin Raptopoulos.

1. Automação industrial. 2. Robótica – Modelos matemáticos. 3. Robôs - Dinâmica. 4. Cinemática das máquinas. 5. Robôs – Sistemas de controle. 6. Manipuladores (Mecanismo). I. Raptopoulos, Luciano Santos Constantin (orient.). II.Título.

CDD 629.8

RESUMO

MODELAGEM DINÂMICA E DE CONTROLE DE UM MECANISMO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA APLICAÇÃO EM UM ROBÔ HEXÁPODE

Djalma Demasi

Orientador:

Luciano Santos Constantin Raptopoulos

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Este trabalho apresenta como contribuição uma proposta de mecanismo de três graus de liberdade para ser utilizada como perna de um robô hexápode. Para isso, foi realizado um estudo dos principais tipos de robôs dotados de pernas, que permitiu a elaboração de um modelo teórico e o desenvolvimento de algoritmos para a cinemática inversa, equações dinâmicas de Lagrange e controle. Demonstrada a estabilidade do sistema, trajetórias foram simuladas e os resultados teóricos se mostraram coerentes com a análise física do mecanismo, o que motivou o desenvolvimento do protótipo. Com os dados da análise estrutural do mecanismo, novas rotinas foram simuladas e os resultados se mostraram satisfatórios e compatíveis com os dados obtidos para o modelo teórico. O controlador não-linear foi projetado segundo a técnica de torque computado e as simulações foram capazes de seguir uma trajetória especificada.

Palavras-Chave:

Robótica móvel; Controle não-linear; Manipuladores

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2012

ABSTRACT

DYNAMIC MODELING AND CONTROL MECHANISM WITH THREE DEGREES OF FREEDOM FOR APPLICATION IN A HEXAPOD ROBOT

Djalma Demasi

Advisor:

Luciano Santos Constantin Raptopoulos

Abstract as dissertation submitted to Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering and Materials Technology.

This paper presents a contribution to a proposed mechanism for three degrees of freedom to be used as a leg of hexapod robot. For this, we conducted a study of the major types of robots equipped with legs that allowed the elaboration of a theoretical model and the development of algorithms for the inverse kinematics, dynamic equations of Lagrange and control. Demonstrated the stability of the system trajectories were simulated and the theoretical results proved consistent with the physical analysis of the mechanism, which led to the development of the prototype. With the data of structural analysis of the mechanism, new routines were simulated and the results were satisfactory and consistent with the data obtained for the theoretical model. The nonlinear controller was designed according to the computed torque technique and the simulations were able to follow a specified path.

Keywords:

Legged Robots; Nonlinear Control; Manipulators

Rio de Janeiro
February, 2012

SUMÁRIO

Lista de Figuras x

Lista de Tabelas xiv

I Introdução e Objetivos 1

II Sistemas Robóticos de Locomoção por Pernas 3

II.1. Contexto histórico 3

II.1.1. Sistemas articulados 3

II.1.2. Primeiros estudos 4

II.1.3. Primeiros robôs 5

II.2. Tipos de robôs 6

II.2.1. Robôs de salto 6

II.2.2. Robôs bípedes 8

II.2.3. Robôs quadrúpedes 10

II.2.4. Robôs hexápodes 14

II.2.5. Robôs octópodes 14

II.3. Robôs hexápodes 16

II.3.1. Primeiros robôs 16

II.3.2. Robôs biologicamente inspirados 18

II.3.3. Alguns exemplos atuais 21

III Cinemática de Manipuladores 23

III.1. Cinemática direta 23

III.1.1. Definições preliminares 23

III.1.2. Sistemas de coordenadas referenciais 23

III.1.3. Matriz de transformação homogênea 25

III.1.4. Parâmetros de Denavit-Hartenberg 25

III.1.5. Equações cinemáticas 27

III.2. Cinemática inversa 29

III.2.1. Cálculo de θ_1 29

III.2.2. Cálculo de θ_2 29

III.2.3. Cálculo de θ_3 30

III.3. Campo de trabalho 31

III.4. Torque estático 32

IV Dinâmica de Robôs 35

IV.1. Movimento dos elos de um robô 35

IV.1.1. Velocidade angular entre elos 35

IV.1.2. Velocidade no espaço cartesiano e das juntas 36

IV.1.3. Velocidades angulares 38

IV.1.4. Singularidades 38

IV.1.5. Aceleração angular 39

IV.2. Dinâmica de manipuladores 41

IV.2.1. Tensor de inércia 41

IV.2.2. Energia cinética 41

IV.2.3. Energia potencial 43

IV.2.4. Equações de movimento de Lagrange 43

IV.3. Equações dinâmicas na forma matricial 45

IV.3.1. Definições preliminares 45

IV.3.2. Energia cinética na forma compacta 46

IV.3.3. Equações dinâmicas definidas por matrizes especiais 46

IV.3.4. As matrizes *M*, *C* e *G* 49

V Controle de Manipuladores 52

V.1. Introdução 52

V.2. Controle do torque computado 52

V.3. Controle de 1 junta 53

V.3.1. Motor de corrente contínua 53

V.3.2. Relações básicas 54

V.3.3. Torque no eixo de cargas 55

V.3.4. Funções de transferência 56

V.3.5. Controlador proporcional-derivativo 56

V.3.6. Critérios de estabilidade 57

V.4. Controle de múltiplas juntas 58

V.4.1. Lei de controle 58

V.4.2. Equação diferencial do erro 60

V.5. Convergência no sentido de Lyapunov 61

VI Projeto Mecânico 65

VI.1. Estudo de modelos de pernas 65

VI.1.1. Atuadores pneumáticos 65

VI.1.2. Mecanismo pantográfico 65

VI.1.3. Configurações inspiradas na biologia 66

VI.2. Proposta de projeto mecânico 68

VI.2.1. Junta 1 69

VI.2.2. Elo 1 70

VI.2.3. Elo 2 71

VI.2.4. Elo 3 72

VII Resultados e Discussões 74

VII.1. Análise dinâmica 74

VII.1.1. Trajetórias baseadas em funções matemáticas 74

VII.1.2. Trajetórias inspiradas na biologia 86

VII.2. Análise de controle 91

VIII Conclusão e Trabalhos Futuros 109

Referências Bibliográficas 111

ANEXO A - Fundamentos da teoria de Lyapunov 123

A.1. Definições de estabilidade 123

A.2. Funcões de Lyapunov 125

A.3. Método direto de Lyapunov 126

ANEXO B - Catálogos 127

Lista de Figuras

Figura II.1 - (a) Mecanismo original de Chebychev; (b) Mecanismo adaptado..... 3

Figura II.2 - General Electric Walking Truck…..……..……..…….....….5

Figura II.3 - (a) WAP-3; (b) Phony Pony; (c) WABOT-1…….....…….……6

Figura II.4 - Equilíbrio ativo de robôs de uma perna.....7

Figura II.5 - 3D One-leg Hopper…….7

Figura II.6 - (a) WABOT-2; (b) 3D Biped; (c) Spring Flamingo …….....……8

Figura II.7 - (a) NAO; (b) ASIMO; (c) WABIAN-2R; (d) LOLA-2; (e) HRP-4C e HRP-2; (f) TOPIO-3; (g) QRIO.....10

Figura II.8 - MIT Quadruped.....11

Figura II.9 - (a) RIMHO-2, (b) SILO-4.....11

Figura II.10 - TITAN-VIII.....12

Figura II.11 - AIBO.....12

Figura II.12 - SCOUT-II…….....13

Figura II.13 - TEKKEN-IV.....13

Figura II.14 - AlphaDog.....14

Figura II.15 - (a) Dante II; (b) Scorpion.....15

Figura II.16 - Robô lagosta.....15

Figura II.17 - (a) Gurfinkel Hexapod; (b) OSU Hexapod.....16

Figura II.18 - (a) Hexápode de Sutherland; (b) ODEX I.....17

Figura II.19 - ASV-84.....17

Figura II.20 - Carausius Morosus.....18

Figura II.21 - (a) Genghis; (b) Hannibal.....19

Figura II.22 - TUM.....19

Figura II.23 - LAURON II.....20

Figura II.24 - HAMLET.....20

Figura II.25 - ROBOT V.....21

Figura II.26 - (a) DLR-Walker; (b) SILO-6.....21

Figura II.27 - (a) Robô formiga; (b) Phoenix; (c) NXT Spike.....22

Figura III.1 - Esquema simplificado da perna do hexápode.....24

Figura III.2 - Localização dos sistemas de referências.....24

Figura III.3 - Orientação angular: vistas frontal e superior.....25

Figura III.4 - Representação dos parâmetros D-H.....26

Figura III.5 - Referenciais de acordo com a orientação de D-H.....27

Figura III.6 - Campo de trabalho no plano yz.....32

Figura III.7 - Forças externas atuando na perna.....33

Figura III.8 - Torques obtidos em MATLAB® para velocidades angulares nulas.....34

Figura V.1 - Motor com redução.....55

Figura V.2 - Diagrama de blocos do controlador.....60

Figura VI.1 - (a) TITAN-IV; (b) Esquema da perna do Dante.....66

Figura VI.2 - (a) Perna do inseto; (b) Modelagem.....67

Figura VI.3 - (a) Projeto com servomotores; (b) Projeto com motores DC.....67

Figura VI.4 - Proposta de projeto mecânico para a perna do hexápode.....68

Figura VI.5 - Junta 1.....69

Figura VI.6 - Vista isométrica do elo 1.....70

Figura VI.7 - Vistas do elo 1. (a) Vista inferior; (b) Vista frontal.....70

Figura VI.8 - Vista isométrica do elo 2.....71

Figura VI.9 - Vista superior do elo 2.....72

Figura VI.10 - Elo 3.....73

Figura VII.1 - Representação esquemática da perna no MATLAB®.....74

Figura VII.2 - Curvas simuladas para as trajetórias verticais.....75

Figura VII.3 - Ângulos das juntas. (a) Trajetória vertical 1; (b) Trajetória vertical 2.....76

Figura VII.4 - Torques no modelo teórico para as trajetórias verticais.....76

Figura VII.5 - Torques no protótipo para as trajetórias verticais.....77

Figura VII.6 - Contribuições do torque relativas às matrizes de inércia e Coriolis e vetor gravitacional....78

Figura VII.7 - Torques no modelo teórico (acima) e no protótipo (embaixo)....79

Figura VII.8 - Equação paramétrica da elipse e sua curva simulada....79

Figura VII.9 - Vista isométrica do movimento circular....80

Figura VII.10 - Variação angular do movimento circular....80

Figura VII.11 - Torques no modelo teórico para a trajetória elíptica....81

Figura VII.12 - Torques no protótipo para a trajetória elíptica....81

Figura VII.13 - Junta 1 do protótipo. (a) Velocidade angular; (b) Aceleração angular....82

Figura VII.14 - Equação paramétrica da lemniscata e sua curva simulada....82

Figura VII.15 - Variação angular da curva lemniscata....83

Figura VII.16 - Torques na lemniscata. (a) Modelo teórico; (b) Protótipo....83

Figura VII.17 - Equações paramétricas da espiral e sua curva simulada....84

Figura VII.18 - Vista do plano yz do movimento....84

Figura VII.19 - Variação angular da trajetória helicoidal....85

Figura VII.20 - Torques na trajetória helicoidal. (a) Modelo teórico; (b) Protótipo....85

Figura VII.21 - Comportamento das funções x e z....87

Figura VII.22 - Trajetória representativa da perna de um louva-deus....87

Figura VII.23 - Vista no plano xz....88

Figura VII.24 - Variação angular das juntas....88

Figura VII.25 - Torques na trajetória de Koyachi para o modelo teórico....89

Figura VII.26 - Torques na trajetória de Koyachi para o protótipo....89

Figura VII.27 - Contribuições do torque relativas as matrizes de inércia e Coriolis e vetor gravitacional....90

Figura VII.28 - Resposta do motor considerando a indutância....92

Figura VII.29 - Resposta do motor desconsiderando indutância....92

Figura VII.30 - Voltagem em função dos ângulos desejados....93

Figura VII.31 - Voltagem no eixo de saída sem carregamento....94

Figura VII.32 - Voltagem no eixo de saída com carregamento.....95

Figura VII.33 - Voltagem no eixo de saída com carregamento.....96

Figura VII.34 - Resposta do ângulo real em função do desejado.....97

Figura VII.35 - Controlador.....98

Figura VII.36 - Ângulo real (modelo teórico) para posição próxima do início da trajetória.....99

Figura VII.37 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no modelo teórico.....100

Figura VII.38 - Ângulo real (modelo teórico) para posição distante do início da trajetória.....101

Figura VII.39 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no modelo teórico.....102

Figura VII.40 - ângulo real no protótipo para posição próxima do início da trajetória.....104

Figura VII.41 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no protótipo.....105

Figura VII.42 - ângulo real no protótipo para posição distante do início da trajetória.....106

Figura VII.43 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no protótipo.....107

Figura A.1 - Noção de estabilidade.....124

Figura A.2 - Estabilidade assintótica.....124

Lista de Tabelas

Tabela III.1 - Descrição dos parâmetros D-H.....26

Tabela III.2 - Parâmetros de D-H.....27

Tabela III.3 - Variação angular aproximada de cada junta.....31

Tabela VI.1 - Dados do conjunto redutor, motor e sensor.....69

Tabela VI.2 - Dados do elo 1.....71

Tabela VI.3 - Dados do elo 2.....72

Tabela VI.4 - Dados do elo 3.....73

Tabela VII.1 - Parâmetros dinâmicos.....91

Tabela VII.2 - Comparativo de voltagens na junta 2.....97

Capítulo I - Introdução e Objetivos

Os sistemas robóticos autônomos se dividem, essencialmente, em duas áreas: robótica de manipulação e robótica móvel. Os braços mecânicos, ou manipuladores, são ideais para tarefas repetitivas e podem realizar trabalhos com grande velocidade e precisão. Apesar de serem amplamente difundidos, os manipuladores têm a desvantagem de precisar de uma base fixa para atuar, o que limita suas capacidades. Os robôs móveis, em contrapartida, para que possam se deslocar livremente em determinado terreno necessitam de mecanismos de locomoção, tais como rodas, esteiras ou pernas mecânicas.

Apesar de há centenas de milhões de anos os seres vivos usarem as pernas para se locomover, os veículos movidos a rodas são os mais desenvolvidos e os mais comuns no nosso cotidiano (SONG, 1989). São tão inertes na nossa vida que dificilmente nos damos conta de nossa dependência a este tipo de locomoção. Entretanto, as atividades de pesquisas na área de robôs móveis têm crescido significativamente nos últimos anos, pois existe uma grande demanda para exploração e operação em terrenos naturais.

Uma parte substancial do planeta Terra é inacessível a todo e qualquer tipo de mecanismos com rodas. Obstáculos naturais tais como rochas de grandes dimensões, solo irregular, terra solta, fendas profundas e encostas íngremes tornam a locomoção por rolamento ineficaz. O fundo do oceano, as superfícies da lua e de outros planetas também são terrenos passíveis de serem explorados, mas que apresentam os mesmos tipos de problemas. Os sistemas biológicos conseguem se mover com êxito através de uma variedade de ambientes naturais e os mecanismos com pernas são mais adequados, pois podem escalar obstáculos e passar sobre valas ou descontinuidades do solo (TODD, 1985).

Com exceção dos robôs movidos a rodas ou esteiras, a maioria dos mecanismos de locomoção é inspirada nos seres vivos: um robô pode ser projetado para andar, correr, deslizar, patinar, nadar, voar ou rolar. Apesar disso, desenvolver mecanismos de locomoção inspirados na natureza não é necessariamente uma tarefa fácil. Quanto maior o número de pernas, ou mais complexo forem os mecanismos, maior será a complexidade mecânica envolvida (em geral, locomoção por pernas requer mais graus de liberdade). Também deve ser considerado o aumento no peso do protótipo e um consumo de energia maior. Os insetos, por exemplo, mesmo com tamanho e peso reduzidos, atingem um nível de robustez que as técnicas de fabricação humana são incapazes de alcançar. O sistema biológico de armazenamento de energia e os sistemas de ativação muscular utilizados por animais de grande porte e insetos podem alcançar torque, tempo de resposta e eficiência de conversão que excedem a capacidade dos sistemas feitos pelo homem (SIEGWART, 2004).

Portanto, a escolha do projeto mecânico tanto do robô quanto da sua perna é de extrema importância e deve levar em consideração a topologia do terreno, a complexidade de controle, o custo energético entre outros. Por fim, todo veículo precisa ser controlado, seja por um humano, ou por um computador, de forma que é necessário o estudo de métodos de controle sobre tais veículos.

O objetivo principal desse trabalho é apresentar o estudo e desenvolvimento de um mecanismo de 3 graus de liberdade para utilização como uma das pernas de um robô hexápode.

Capítulo II - Sistemas Robóticos de Locomoção por Pernas

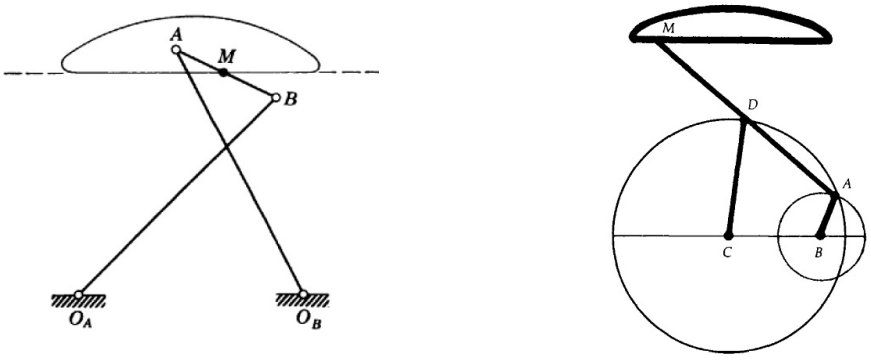
Este capítulo apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre a evolução dos robôs dotados de pernas. Foi feito um estudo sobre os principais sistemas robóticos de locomoção de acordo com o número de pernas e graus de liberdade por perna, dando destaque aos robôs hexápodes.

II.1. Contexto histórico

II.1.1. Sistemas articulados

Segundo ROSHEIM (1997), Leonardo da Vinci no século XV projetou o primeiro robô antropomórfico articulado da história da civilização ocidental nos anos de 1495 a 1497. Era um cavaleiro dotado de armadura e com acionamento através de cabos.

O século XIX foi a era do motor a vapor e das ferrovias. Engenheiros da época se viam diante de problemas técnicos como, por exemplo, transformar um movimento de rotação em um movimento retilíneo usando sistemas de barras articuladas, engrenagens, polias, etc.. A resposta a esses questionamentos foi dada, nessa mesma época, por alguns geômetras e algebristas que estudavam mecanismos articulados, não como dispositivos mecânicos, mas como ferramentas para desenhar curvas. Eles conseguiram desenvolver mecanismos de quatro barras específicos, cujo determinado ponto, em algum momento da sua trajetória, era capaz de percorrer uma linha reta (HARTENBERG, 1964).



(a) (b)

Figura II.1 - (a) Mecanismo original de Chebychev (HARTENBERG, 1964); (b) Mecanismo adaptado (RAIBERT, 1986).

O mecanismo do matemático russo Chebyshev se destacou, pois era capaz de simular o movimento do pé humano em uma caminhada (Figura II.1), permitindo que um objeto pudesse

se mover em linha reta (TCHEBICHEFF, 1884). Segundo RAIBERT (1986), essa foi a origem dos estudos sobre máquinas dotadas de pernas.

Ainda no século XIX, em 1893, Lewis A. Rigg patenteou o projeto da primeira máquina quadrúpede, denominada The Mechanical Horse. Nesta máquina os estribos funcionavam como pedais e o seu movimento era transmitido às pernas por um conjunto de engrenagens. As rédeas permitiam mover a cabeça e as pernas para frente de forma a controlar a direção do veículo. Não há registros de que esta máquina foi construída (RAIBERT, 1986).

Até a metade do século XX outras máquinas com conceitos de engrenagens e mecanismos articulados foram elaboradas, mas sem obterem relativo sucesso até que em meados dos anos 60 chegou-se à conclusão que os veículos com pernas baseados em articulações não representavam uma alternativa aos veículos com rodas. O maior problema era a limitação quanto ao movimento, pois as engrenagens imprimiam sempre o mesmo padrão de locomoção com intervalos regulares. De fato, a adaptabilidade desses sistemas a terrenos irregulares é nula e começou a ganhar força a idéia de que os mecanismos com pernas precisavam de um sistema de controle, ou pela ação do homem, ou por computador. Ao serem controlados iriam ganhar mobilidade e adaptabilidade, pois não teriam necessidade de seguirem padrões fixos de movimento dados pelas articulações (SCHNEIDER, 2006; SILVA, 2005; BARRETO, 1997).

II.1.2. Primeiros estudos

O trabalho de Eadweard Muybridge, em 1870, foi o primeiro estudo científico documentado e de relevância sobre padrão de locomoção de animais. Consistiu em analisar fotos de cavalos em trote para descobrir se o animal, ao trotar, tirava as quatro pernas ao mesmo tempo do chão (RAIBERT, 1986).

Em 1960, Shigley publicou um trabalho acadêmico no qual apresenta diversos sistemas que poderiam ser utilizados em máquinas locomotoras (SHIGLEY, 1960). Dentre eles se destacam os mecanismos de quatro barras e os pantográficos que inspiraram projetos mecânicos de diversos robôs.

No início da década de 60, Ralph Mosher, pesquisador da General Elertric, iniciou um projeto para o desenvolvimento de um braço mecânico e de um exoesqueleto com a finalidade de amplificar forças e capacidades humanas. Os protótipos ficaram conhecidos como *Handyman* e *Hardiman* (MOSHER, 1967). Porém, a sua contribuição mais importante ocorreu em 1968, com o caminhão quadrúpede. Este veículo, de 1360 kg, era controlado por uma pessoa em seu interior através da manipulação de punhos e pedais que se conectavam às pernas hidraulicamente. Cada perna tinha três graus de liberdade e era propulsionado por um

motor de combustão. O veículo se tornou referência por ser um dos primeiros a adotar diferentes padrões de locomoção (MOSHER, 1968).

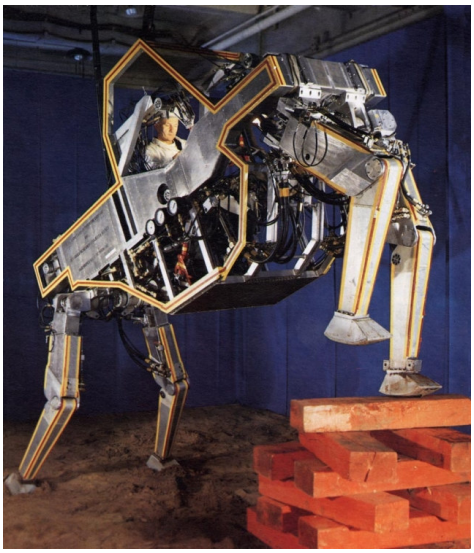


Figura II.2 - General Electric Walking Truck (MOSHER, 1968).

As máquinas projetadas até então, de fato apresentavam uma evolução em relação às desenvolvidas com articulações, mas ainda estavam longe de reproduzir os sistemas biológicos. Era necessário aprimorar os estudos em relação aos padrões de locomoção de insetos e animais, desenvolver técnicas de controle além de criar novas tecnologias.

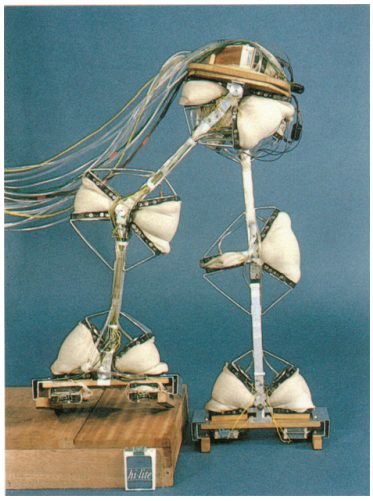
II.1.3. Primeiros robôs

Nos anos sessenta e setenta começaram a surgir os primeiros robôs móveis. Os resultados mais importantes dessas décadas devem-se aos centros de pesquisas dos Estados Unidos, Japão e Rússia.

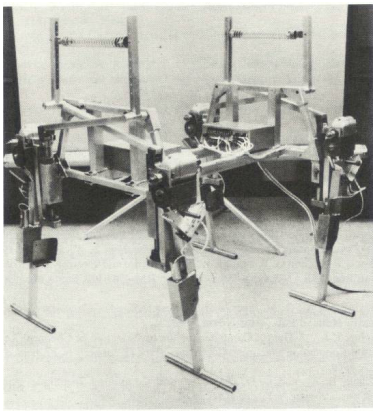
Na metade dos anos 60, Mc Ghee e Frank projetaram e desenvolveram nos Estados Unidos o Phony Pony. O robô é um quadrúpede com dois graus de liberdade em cada perna onde cada uma das juntas é atuada por motor elétrico e alimentação externa. Apresentava apenas dois padrões de locomoção e só andava em linha reta. Foi o primeiro robô a se locomover autonomamente, controlado por computador (MC GHEE, 1966; SCHNEIDER, 2006).

Ichiro Kato, professor da Universidade de Waseda no Japão, foi um dos pioneiros da robótica no país. Em 1967 construiu o seu primeiro par de pernas, o WL-1, que daria início à família de robôs WL. Em 1969 desenvolveu o seu primeiro robô antropomórfico, o WAP-1, que dispunha de músculos artificiais de borracha atuados pneumaticamente. Em 1971 o WAP-3 foi

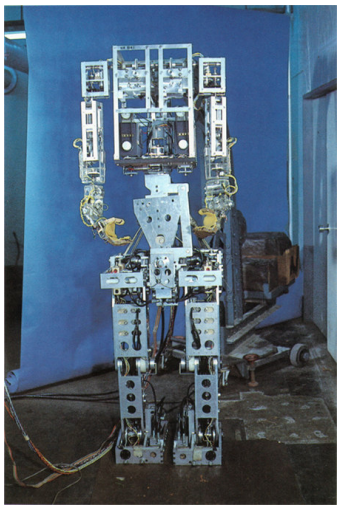
o primeiro robô da história a se locomover em três dimensões. Tinha a capacidade de se inclinar e subia e descia escadas. Em 1973 o WABOT-1 foi o primeiro robô antropomórfico em escala real (LIM, 2007). Podia se expressar em japonês, tinha noção de distância e orientação e era capaz de pegar e transportar objetos com sua mão. Seus pés eram desproporcionais ao seu tamanho, e se arrastava mais do que andava (KATO, 1973).



(a)



(b)



(c)

Figura II.3 - (a) WAP-3 (WASEDA UNIVERSITY, 2010); (b) Phony Pony (MC GHEE, 1966); (c) WABOT-1 (WASEDA UNIVERSITY 2010a).

Em 1977, Rússia e Estados Unidos desenvolveram praticamente ao mesmo tempo dois robôs hexápodes muito semelhantes, o "Masha" Hexapod (russo) e o OSU Hexapod (americano). Maiores detalhes destes robôs serão apresentados na seção II.3.

A característica principal entre os robôs dessa época era a baixa velocidade de locomoção. A partir dos anos 80, com o avanço das tecnologias de atuadores, sensores e computadores, começaram a surgir robôs com mais habilidades e diversificados

.

II.2. Tipos de robôs

II.2.1. Robôs de salto

Basicamente, quando surgiram, os robôs de salto eram fundamentalmente de uma perna. Caracterizavam-se por manter seu equilíbrio ativo enquanto se deslocavam (RAIBERT, 1989).

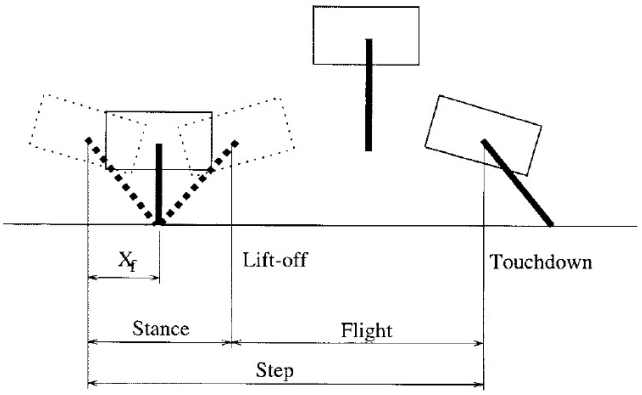


Figura II.4 - Equilíbrio ativo de robôs de uma perna (GREGORIO, 1997).

O primeiro protótipo relevante foi o de Matsuoka. Ele construiu a primeira máquina de uma perna capaz de correr e o seu objetivo era modelar padrões de saltos humanos (MATSUOKA, 1979).

Ao longo dos anos 80 e 90 Raibert ampliou o conceito inicial de robôs de salto. Junto com a sua equipe do Leg Laboratory, do MIT, construiu protótipos de uma, duas e quatro pernas que serviram de bancada de testes para elaboração de diversos algoritmos de controle que ainda são empregados hoje em dia (RAIBERT, 1989). Segundo LASA (2000), os trabalhos desenvolvidos por Raibert com robôs de salto são os mais importantes e utilizados até hoje, inspirando não só a construção de protótipos, mas também novas pesquisas.

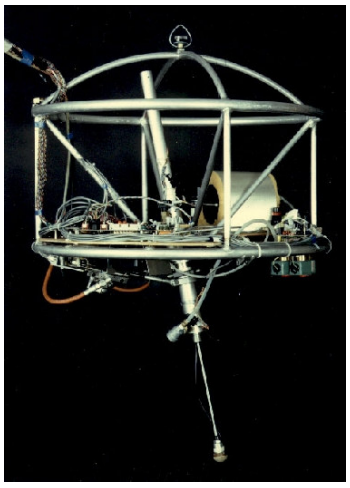


Figura II.5 - 3D One-leg Hopper (RAIBERT, 1986).

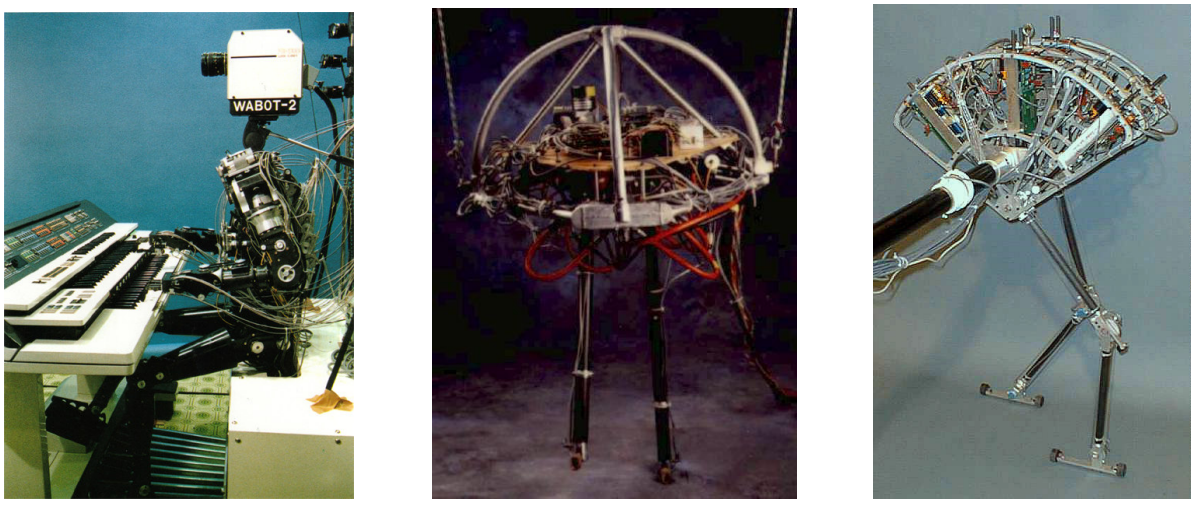
Um dos problemas chave na implementação de robôs com equilíbrio ativo é a eficiência energética. Gregorio e Buehler ao construirem os robôs ARL Monopod I e II, provaram que era possível alterar os métodos de controle e projeto propostos por Raibert e obter uma redução de 40% no consumo energético (GREGORIO, 1997; AHMADI, 1999).

Atualmente os robôs de salto são uma solução de custo eficaz para os sistemas exploratórios de superfícies, pois priorizam projetos simples ao invés de altas performances. Quando utilizados em grande número podem explorar extensas áreas (SEENI, 2010). Para tentar minimizar o alto consumo de energia, modelos híbridos vêm sendo estudados (SCHELL, 2001; CONFENTE, 2002). Dentre as pesquisas recentes, merecem destaque o robô apresentado por DUPUIS (2006) com mecanismo de salto feito com liga de memória de forma e o hexápode saltador de YOUNSE (2008).

II.2.2. Robôs bípedes

Devido à grande quantidade de robôs existentes esta pesquisa irá se concentrar basicamente no eixo Japão - EUA. Informações sobre o desenvolvimento de humanóides em outros países podem ser encontradas em AKHTARUZZAMAN (2010) e CHEVALLEREAU (2009).

Desde Leonardo Da Vinci que o homem tenta criar robôs à sua imagem e semelhança, mas foi somente a partir do século XX que as pesquisas começaram a se desenvolver. Em 1938 a companhia Westinghouse lançou o Elektro, que reconhecia cores, podia mover os braços e o pescoço, reproduzia voz, andava e fumava. Nos anos 60 e 70 as pesquisas mais importantes vinham principalmente do Japão. Dos anos 80 e até a primeira metade dos 90 a família de robôs WL e WABOT da Waseda University, no Japão, e os robôs 3D Biped e Spring Flamingo do MIT Leg Laboratory, nos EUA, foram os mais importantes de sua época (LIM, 2007).



(a) (b) (c)

Figura II.6 - (a) WABOT-2 (KATO, 1987); (b) 3D Biped (PLAYTER, 1992); (c) Spring Flamingo (PRATT, 1998).

Até então, as pesquisas envolvendo controle e simulação de bípedes não tinham avançado tanto quanto os outros robôs multipernas, o que pode ser explicado devido a uma maior exigência de estabilidade e maior complexidade de projeto (KATIC, 2002).

Em 1996 a Honda revolucionou as técnicas de pesquisa em humanóides. A apresentação do P2, projeto que vinha sendo guardado em segredo desde 1986, deixou atônita a comunidade científica. Com 30 graus de liberdade, 1,82 m de altura e 210 Kg, foi o primeiro robô a se locomover autonomamente sem cabos (HIRAI, 1998). A partir deste evento houve um aumento natural no interesse de pesquisas e projetos desse tipo de robô. Tudo isso somado à evolução da informática e de equipamentos, como atuadores e sensores, produziu um rápido desenvolvimento nessa área (LÖFFLER, 2003).

A revolução do P2 se deu também no conceito da aplicação do robô. Enquanto os protótipos antigos visavam basicamente reproduzir habilidades humanas, o projeto da Honda visava o desenvolvimento de um robô que pudesse conviver no mesmo ambiente com o homem e que fosse capaz de realizar tarefas extraordinárias. Com isso, Hirai pretendia agregar valores a sociedade humana e o P2 deu início ao conceito de “robôs domésticos” (HIRAI, 1998). KANEKO (2004) propõe uma evolução desse conceito. Segundo o autor, devido ao envelhecimento da população, os robôs deveriam não somente conviver com humanos em seus ambientes domésticos, mas também deveriam atuar em hospitais devido à sua aparência amistosa.

Dos exemplos atuais destacam-se os robôs Johnnie, LOLA-2 e o WABIAN-2R. Johnnie foi desenvolvido pelo Technical University of Munich e tem 1,80 metros, 40 Kg e 17 graus de liberdade. Projetado para corrida, pode alcançar até 2 km/h (LÖFFLER, 2003). O LOLA-2 é uma evolução do Johnnie, sendo 15 Kg mais pesado e capaz de se locomover com o dobro da velocidade de seu antecessor (LOHMEIER, 2006). O WABIAN-2R da Waseda University é o robô mais evoluído da família WABIAN, cujo primeiro protótipo data de 1996. Com 41 graus de liberdade, 1,50 metros e 64 Kg, é um simulador de movimentos humanos (OGURA, 2006). Os autores têm a intenção de que ele possa conduzir ou manipular objetos de reabilitação e bem-estar em enfermarias e hospitais.

Os demais robôs têm como objetivo divertir e entreter as pessoas. O Qrio, da Sony, realizava movimentos executados por comandos por voz e dançava, o NAO é utilizado na competição de futebol de robôs, a RoboCup, o TOPIO-3, foi projetado exclusivamente para jogar tênis de mesa, e o ASIMO, da Honda, que foi a evolução natural do modelo P2, é o robô mais desenvolvido da atualidade.



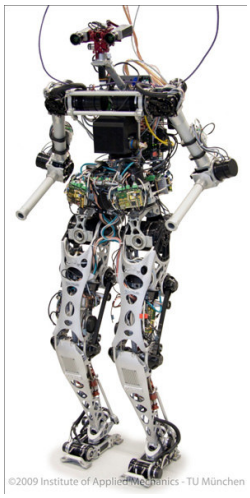
(a)



(b)



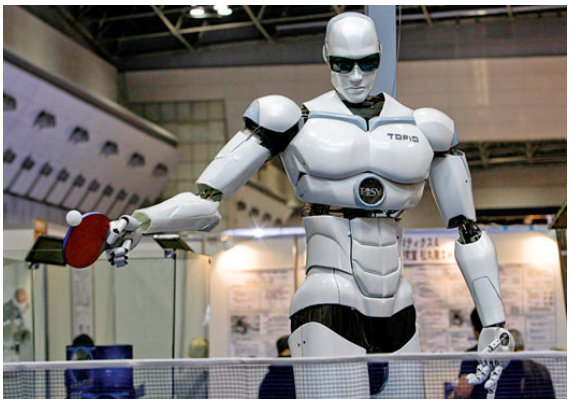
(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

Figura II.7 - (a) NAO (GOUAILLIER, 2009); (b) ASIMO (HONDA, 2007); (c) WABIAN-2R (OGURA, 2006); (d) LOLA-2 (BUSCHMANN, 2009), (e) HRP-4C e HRP-2 (KAJITA, 2009); (f) TOPIO-3 (TOSY ROBOTICS JSC, 2009); (g) QRIO (GEPPERT, 2004)

II.2.3. Robôs quadrúpedes

O primeiro robô de quatro pernas de destaque foi o Phony Pony (seção II.1.3). Vinte anos depois, Raibert desenvolveu o MIT Quadruped. Usando somente os padrões de locomoção dos quadrúpedes que usam pares de perna (trote, marcha e salto), conseguiu adaptar o método de controle do seu robô de uma perna para um de quatro (RAIBERT, 1989). O MIT Quadruped não é capaz de andar em todas as direções e a intenção com esse projeto era o desenvolvimento de algoritmos de controles diversificados.

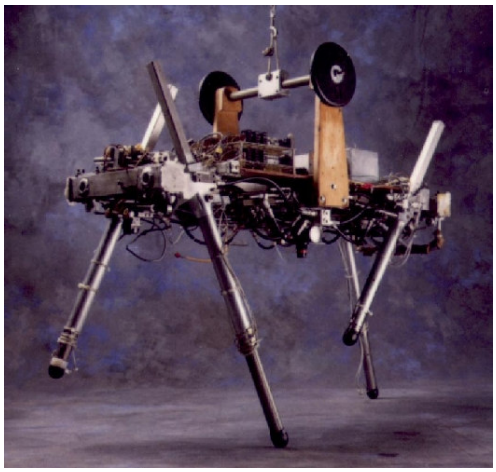
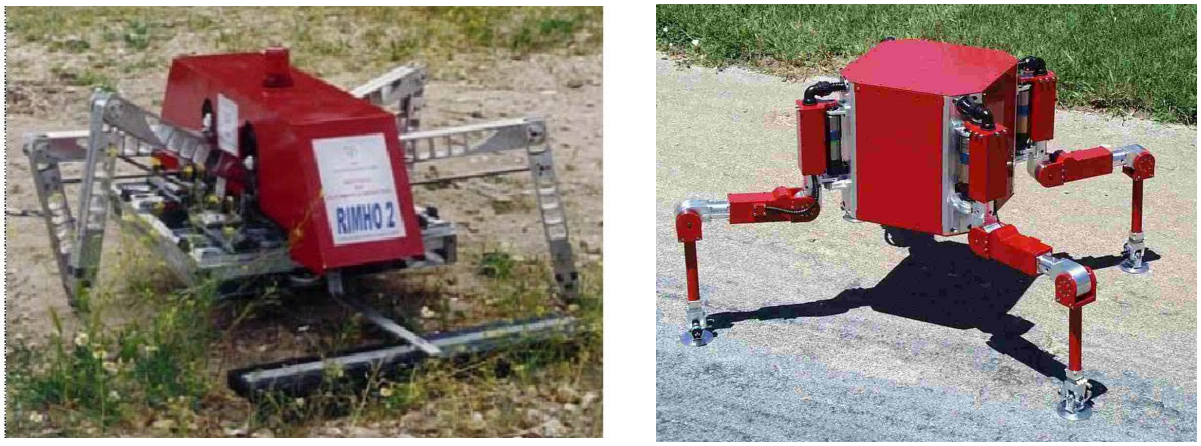


Figura II.8 - MIT Quadruped (RAIBERT, 1990).

A década de 90 ficou marcada pela grande evolução, não só nas pesquisas de controle, mas também de projeto.

O RIMHO-2 e o SILO-4 se destacam por ser um dos poucos robôs fora do eixo EUA – Japão. Construídos pelo Instituto de Automação Industrial (CSIC) de Madri, o RIMHO-2, de 1993, foi o primeiro robô caminhante da Espanha. Usava pernas pantográficas tridimensionais e foi utilizado para detecção e localização de minas terrestres. (VARGAS, 1994; DE SANTO, 2007). O SILO-4, de 2000, é uma plataforma comercial voltada para pesquisa de algoritmos de inteligência artificial e formas de locomoção. Foi desenvolvido para se locomover em terrenos planos, com pouca adaptabilidade em chão irregulares (CSIC, 2000).



(a) (b)

Figura II.9 - (a) RIMHO-2 (DE SANTOS, 2007), (b) SILO-4 (CSIC, 2000).

O TITAN-VIII foi apresentado em 1996 por Arikawa e Hirose. Com uma junta de rotação fixa ao corpo e um mecanismo de correia e polia, apresentava 3 graus de liberdade em cada perna. Além da boa mobilidade, foi concebido de modo a ser um robô simples e de baixo custo de fabricação (ARIKAWA, 1996).

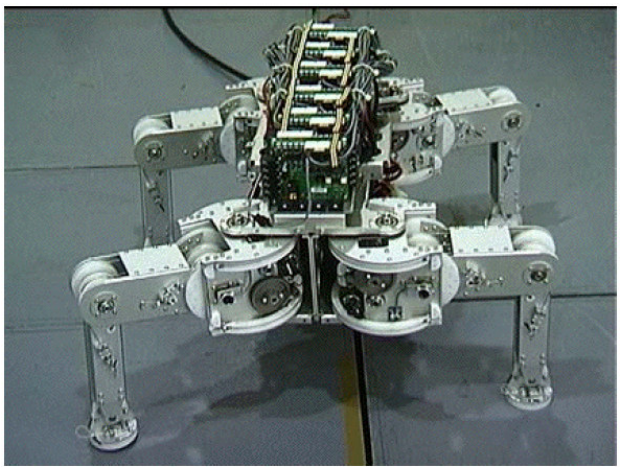


Figura II.10 - TITAN-VII (ARIKAWA, 1996).

O AIBO foi o primeiro robô comercial para fins de entretenimento pessoal. Desenvolvido pela Sony entre 1999 e 2005, podia andar, tinha sistema de visão, de reconhecimento de voz e era capaz de aprender novos movimentos. Foi um sucesso de vendas, mas teve a sua produção descontinuada em 2005, na terceira geração.



Figura II.11 - AIBO (SONY, 2012).

Os robôs atuais de estaque são: SCOUT-II, TEKKEN-IV e o BigDog.

O SCOUT II, de 2003, é um robô com algoritmo simples de controle e um único atuador em cada perna. Foi elaborado em cima de adaptações das pesquisas de Raibert e apresenta não só estabilidade, mas também, velocidade relativamente alta, de 1,3 m/s (PAPADOPOULOS, 2000; POULAKAKIS, 2005).

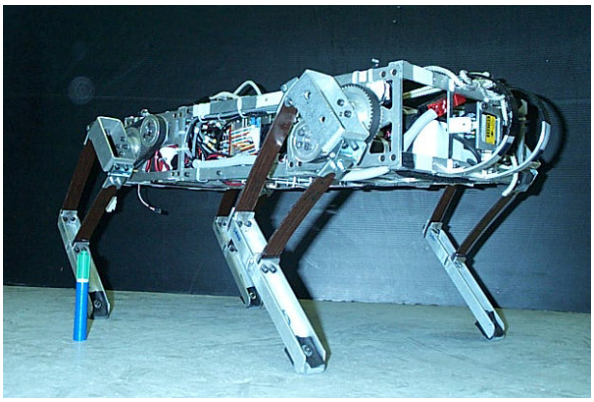


Figura II.12 - SCOUT-II (POULAKAKIS, 2005).

O robô Tekken-IV, apresentado em 2006, ao contrário dos seus antecessores é capaz de percorrer longas distâncias autonomamente. Com visual semelhante a um cachorro, possui um sistema de controle baseado em redes neurais permitindo adaptabilidade em terrenos complexos. O visor de navegação com laser permite tomadas de decisão quanto à trajetória a ser seguida. Seu ponto fraco é a baixa velocidade de navegação, em torno de 0,5 m/s (FUKUOKA, 2010).



Figura II.13 - TEKKEN-IV (FUKUOKA, 2010).

Dentre todos os robôs citados, o mais impressionante é o BigDog, de 2008. Desenvolvido no Boston Dynamics por Raibert e sua equipe, carrega a bordo todos os sistemas necessários de energia, acionamento, sensoriamento e comunicação. Cada perna tem 4 atuadores que são acionados hidraulicamente por motores de combustão. Tem 50

sensores e o computador a bordo permite escolher o tipo de controle mais adequado conforme o terreno. Pesa cerca de 109 Kg, tem 1 metro de altura, é controlado remotamente e alcança 2 m/s em trote. Apresenta como desvantagem o fato de produzir muito ruído (RAIBERT, 2008). O AlphaDog é a evolução natural do BigDog. Ainda está em fase de teste, mas já foi divulgado que ele é capaz de carregar muito mais peso por uma distância maior, é dez vezes mais silencioso que o BigDog e possui equipamentos especiais de visão e giroscópio (ACKERMAN, 2011).

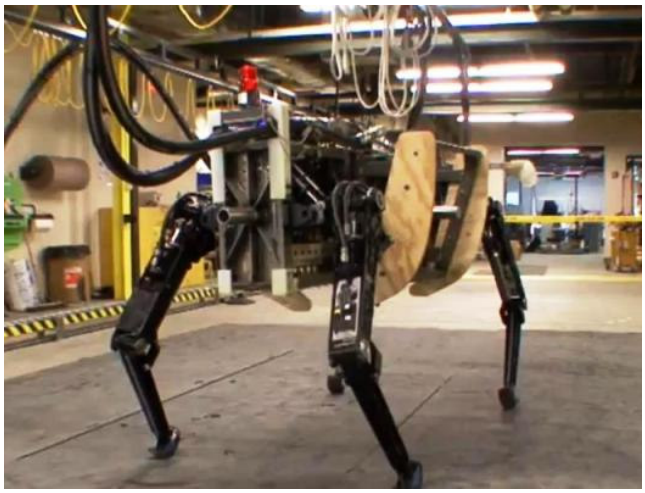


Figura II.14 - AlphaDog (ACKERMAN, 2011).

II.2.4. Robôs hexápodes

Como o objetivo deste trabalho é o estudo de uma perna para ser utilizada em um protótipo de robô hexápode, esses robôs serão discutidos em seção a parte (seção II.3).

II.2.5. Robôs octópodes

Construídos nos anos 90, pela *Carnegie Mellon University*, os robôs Dante foram criados especificamente para exploração de vulcões ativos. O Dante I, de 1992, foi utilizado no Monte Erebus, e o Dante II, de 1994, explorou o Monte Spurr, ambos na Austrália. O acionamento era elétrico via um cabo de alimentação externo que também atuava como suporte para que o robô fosse capaz de descer a parede da cratera sob a forma de rapel. O objetivo das incursões era coletar amostras para medir as composições químicas do magma do vulcão e do gás expelido por ele. O Dante II possuia grande mobilidade e podia ser operado por humanos a quilômetros de distância (WETTERGREEN, 1992; BARES, 1999).

O *Scorpion* é um octópode de 12,5 Kg desenvolvido pelo Fraunhofer-Institut Autonome intelligente Systeme, da Alemanha. Cada perna possui três juntas de rotação atuadas por motores de corrente contínuas com alta taxa de redução. Seus padrões de locomoção são

baseados em estudos dos modos de andar de escorpiões reais e o uso de controle biomimético permite que ele ande em terrenos altamente irregulares e perigosos. Foi enviado para NASA para avaliação de habilidades em missões extraterrestres (KLAASSEN, 2001).



(a) (b)

Figura II.15 - (a) Dante II (BARES, 1999); (b) Scorpion (KLAASSEN, 2001).

Uma das linhas de pesquisa em robôs móveis que vem crescendo constantemente é a tentativa de replicação de sistemas biológicos. Assim como o Scorpion, a lagosta da Northeastern University é outro exemplo. Apresentado pelo Marine Science Center, em 2007, o NU/DARPA/ONR Lobster Robot, é um protótipo com função de realizar operações em águas rasas de sensoriamento remoto. Como diferencial, apresenta controle biomimético baseado em estudos de comportamento e neurofisiologia da lagosta americana e músculos artificiais feitos de liga com memória de forma (Shape Memory Alloy) no lugar dos atuadores (AYERS, 2007).

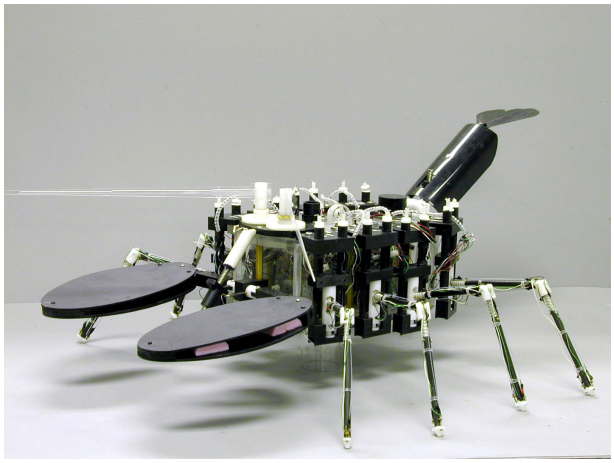


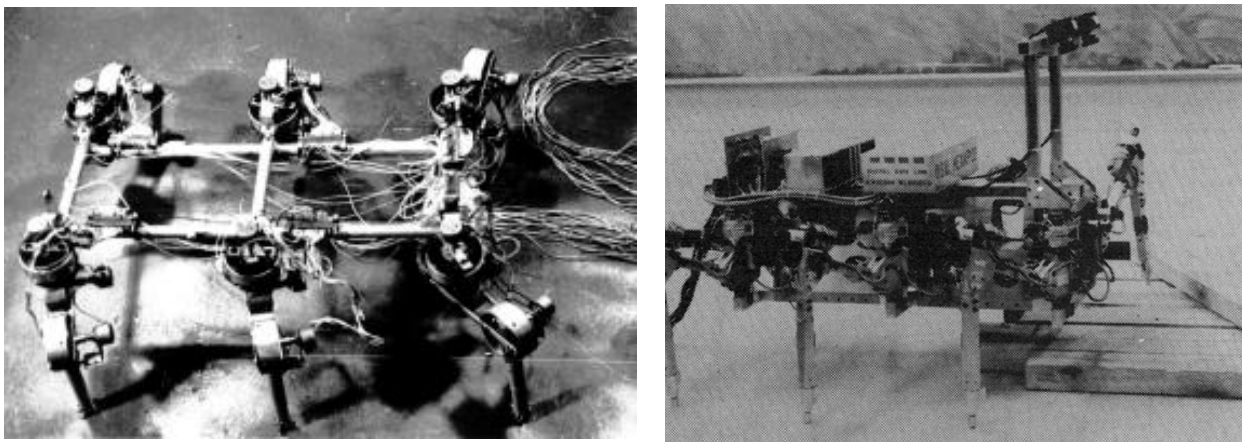
Figura II.16 - Robô lagosta (AYERS, 2007).

II.3. Robôs hexápodes

Nesta seção será apresentado um breve resumo abordando o histórico da evolução dos modelos, os robôs que mais se destacaram, bem como algumas aplicações para os quais são desenvolvidos.

II.3.1. Primeiros robôs

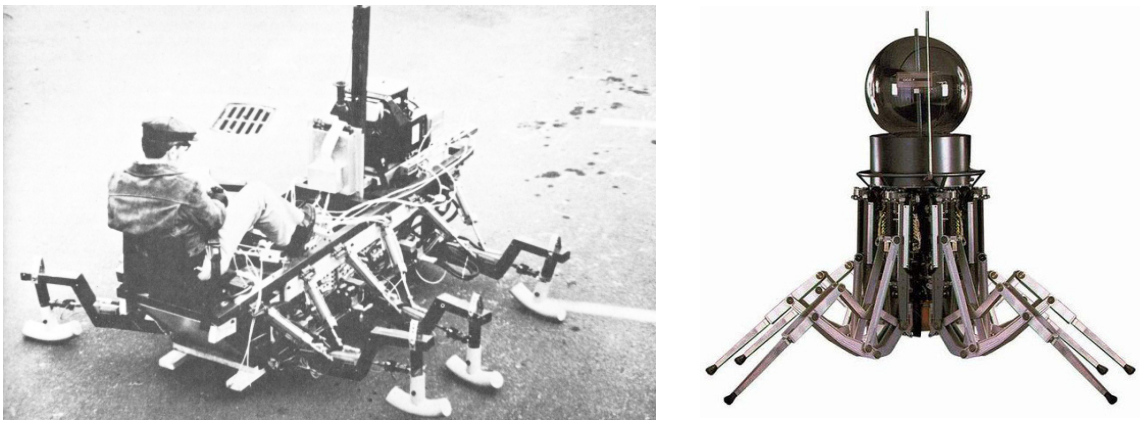
Segundo RAIBERT (1986), Gurfinkel (Universidade de Moscou) e Robert Mc Ghee (Universidade do Estado de Ohio) apresentaram no mesmo ano de 1977, dois hexápodes bastante semelhantes e muito evoluídos para sua época; ambos eram alimentados externamente, controlados por computador e tinham 3 graus de liberdade em cada perna. A diferença se dava pela forma de locomoção: enquanto o robô russo tinha seus movimentos baseados em um pequeno conjunto de funções, o americano usava um algoritmo para calcular as equações cinemáticas e tomadas de decisão.



(a) (b)

Figura II.17 - (a) Gurfinkel Hexapod (GURFINKEL et al, 1981); (b) OSU Hexapod (KLEIN, 1980).

Sutherland e Raibert, em 1983, construíram o primeiro hexápode com microcomputador embarcado. Foi o primeiro veículo independente capaz de transportar um ser humano (SUTHERLAND, 1983).



(a) (b)

Figura II.18 - (a) Hexápode de Sutherland (SUTHERLAND, 1983); (b) ODEX I (RUSSELL, 1983).

O Odex I, de 1983, foi desenvolvido originalmente por Stephen Bartholet para a empresa Odetics Inc. Ficou famoso por sua mobilidade, design e relação carga/peso sem precedentes; com cerca de 168 kg, cada perna podia levantar uma massa de até 180 kg. Sua locomoção era baseada no movimento de três pernas de cada vez e era bastante ágil. Cada perna era controlada por um microcontrolador, estando todos eles ligados a um computador central, instalado na sua própria estrutura (RUSSELL, 1983; BRITTON, 1984).

Em 1985, Waldron e Mc Ghee coordenaram o projeto ASV-84 (Adaptive Suspension Vehicle), um robô hexápode de 5 metros de altura por 1,6 metros de largura, controlado por joystick. Este veículo dispõe também de um radar ótico para estudar o terreno a sua frente e decidir onde colocar os pés da frente (WALDRON, 1986).

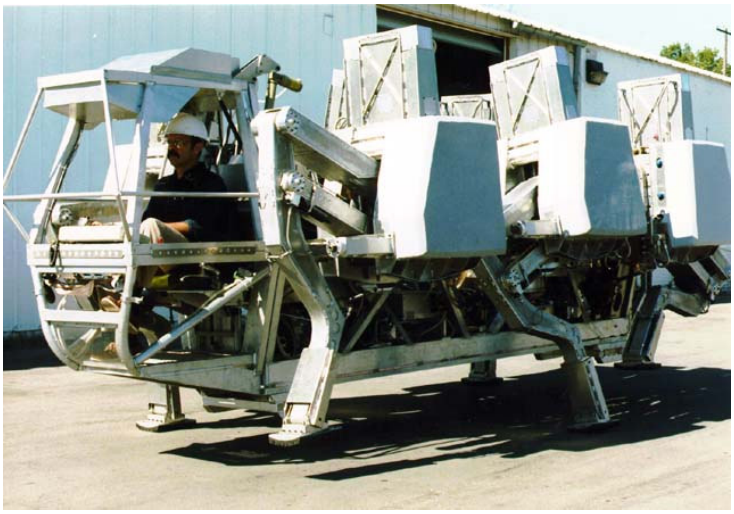


Figura II.19 - ASV-84 (SONG, 1989).

II.3.2. Robôs biologicamente inspirados

Há muito que se discutem as vantagens e desvantagens de sistemas movidos a rodas e pernas. Já na década de 60, Bekker questionava o futuro dos sistemas movidos a rodas apresentando algumas vantagens da locomoção por pernas baseado em estudos feitos com animais (BEKKER, 1961). Em 1976, Cruse com o seu estudo de locomoção do inseto Carausius Morosus, abriu um novo campo de pesquisa na robótica móvel, a replicação de sistemas biológicos (CRUSE, 1976). Segundo PFEIFFER (1990), até então os princípios mecânicos desenvolvidos envolviam puramente conceitos técnicos ao invés dos conceitos biológicos.

Dois fatores contribuíram para a receptividade das pesquisas sobre o Carausius Morosus: a boa mobilidade do inseto e uma modelagem relativamente simples, se comparado a outros insetos, de três graus de liberdade para a perna do robô (PFEIFFER, 1990).

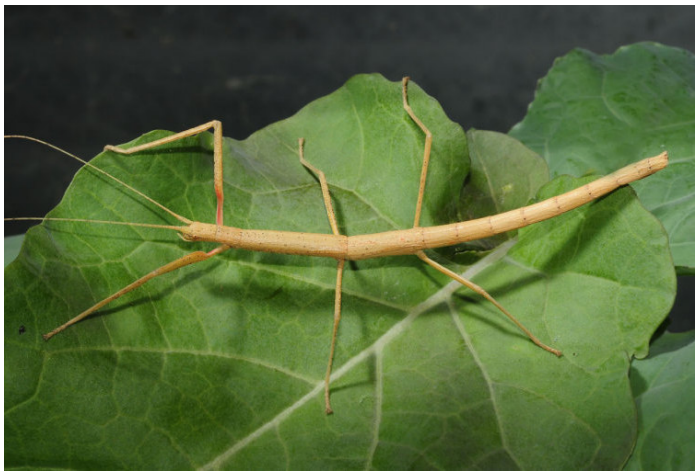
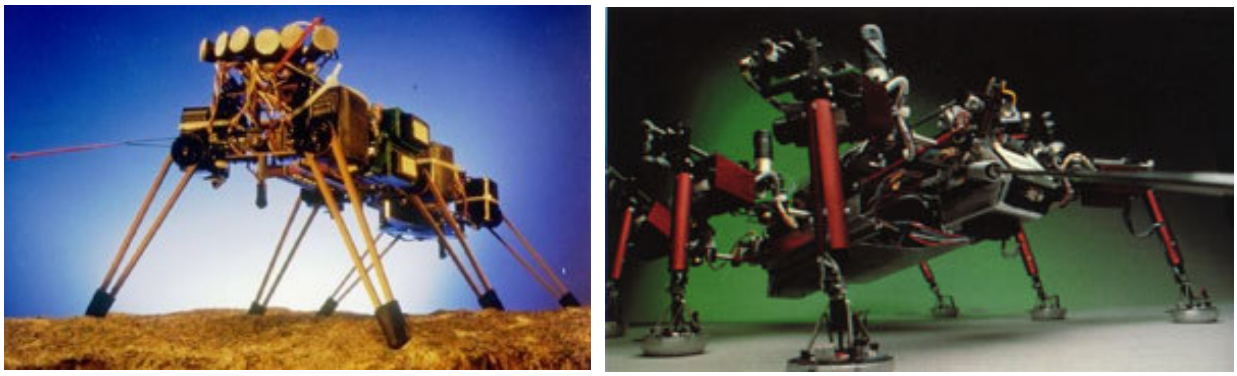


Figura II.20 - Carausius Morosus (HOLOPAINEN, 2008).

O hexápode Genghis foi o primeiro robô dotado de pernas do MIT capaz de se locomover em diferentes tipos de terrenos (YEAPLE, 1991). Fez parte de uma linha de pesquisa do Mobot Lab, no final da década de 80, que visava o desenvolvimento de robôs móveis e leves para exploração autônoma de planetas (ANGLE, 1990). Pesava cerca de 10 N e suas pernas tinham 2 graus de liberdade (ANGLE, 1989; BROOKS, 1989). Foi o protótipo dos robôs Attila e Hannibal, que possuem 19 graus de liberdade, mais de 60 sensores, 8 computadores e são diferenciados apenas pela cor: dourado e vermelho, respectivamente (FERREL, 1994).

.



(a) (b)

Figura II.21 - (a) Genghis (ANGLE, 1989); (b) Hannibal (FERREL, 1995).

O TUM, sigla de “Technische Universitat Munchen”, data de 1993, tem 2,8 Kg em cada perna, totalizando 23 Kg e seus atuadores são capazes de produzir toque de até 60 Nm. (WEIDERMANN, 1994).

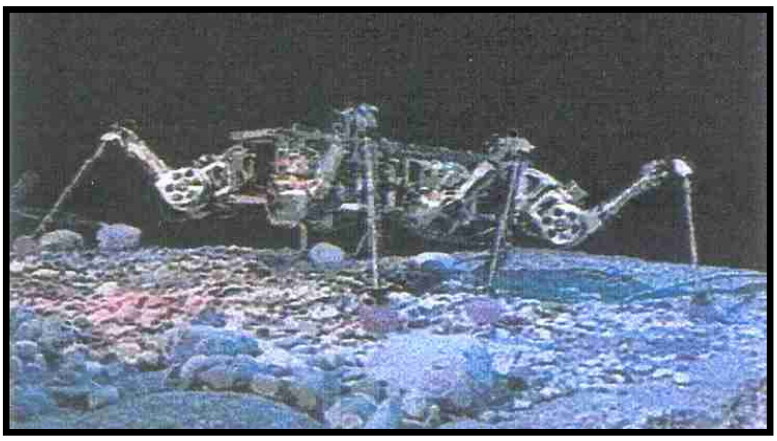


Figura II.22 - (a) TUM (COSTA MELLO, 2004).

Os robôs LAURON (**L**egged **Au**tonomous **Ro**bot **N**eural Controlled) I e II foram desenvolvidos na Alemanha em 1993 e 1994, respectivamente. São capazes de carregar em seus corpos, microcontroladores, unidades de processamento e baterias. Suas pernas permitem que ele ande até de cabeça para baixo. Foram projetados para transportar mais do que os seus próprios pesos, apresentando uma boa relação carga/peso (CORDES, 1997). O LAURON-IV tem como diferencial 4 graus de liberdade por perna (RÖNNAU, 2011).

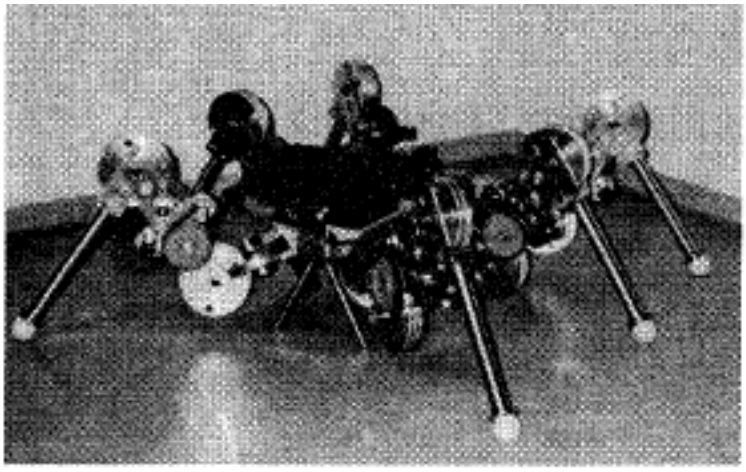


Figura II.23 - LAURON II (CORDES, 1997).

O HAMLET, de 2001, foi construído em conjunto por pesquisadores da Faculdade de Canterbury (Nova Zelândia) e da Universidade de Toronto (Canadá). Todas as juntas são acionadas por motores DC de 10 W e com redução de 1:246, produzindo torque de 4,5 Nm (FIELDING, 2001).

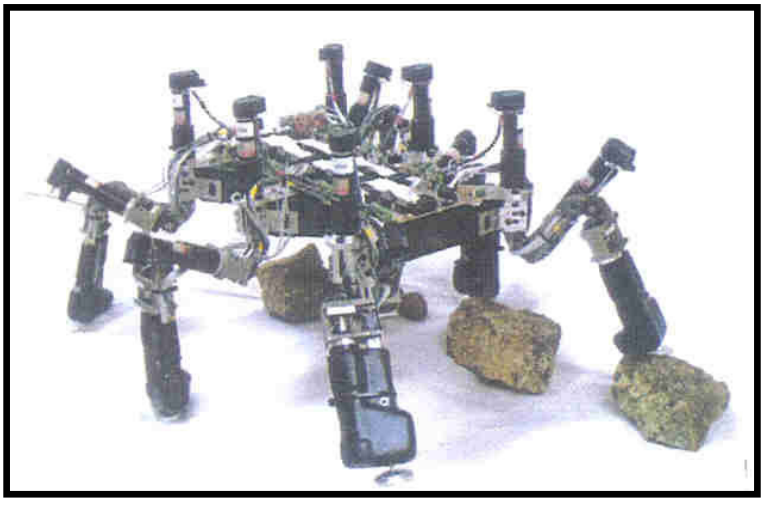


Figura II.24 - HAMLET (COSTA MELLO, 2004).

FULL (1989) e KRAM (1994), do MIT, foram os pioneiros no estudo de locomoção sobre outro inseto, a barata Blaberus Discoidalis. Um dos primeiros robôs desenvolvidos nessa nova linha de pesquisa foi o Boadicea (BINNARD, 1995). Seus atuadores eram acionados pneumaticamente e enquanto as pernas do meio e de trás tinham 3 graus de liberdade, as da frente só tinham dois. O ROBOT V, ou Ajax, é um protótipo mais complexo e recente. Pertence

a uma linha de pesquisa da Case Western Reserve University e também apresenta diferentes graus de liberdade em suas pernas: 3, 4 e 5 (KINGSLEY, 2003 e 2005).

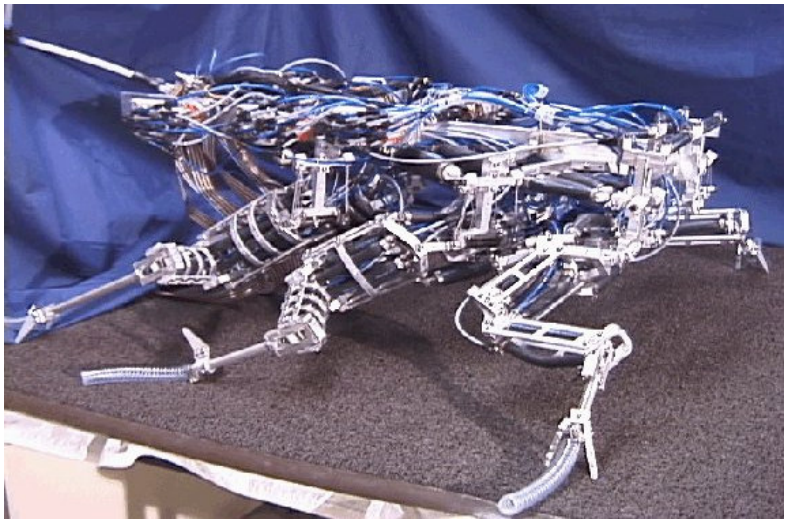
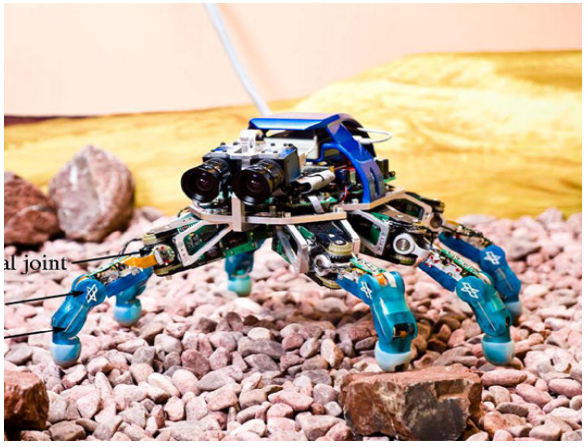
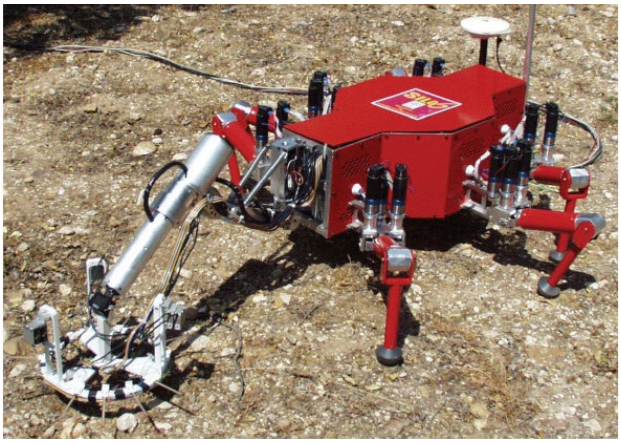


Figura II.25 - ROBOT V (KINGSLEY, 2005).

II.3.3. Alguns exemplos atuais



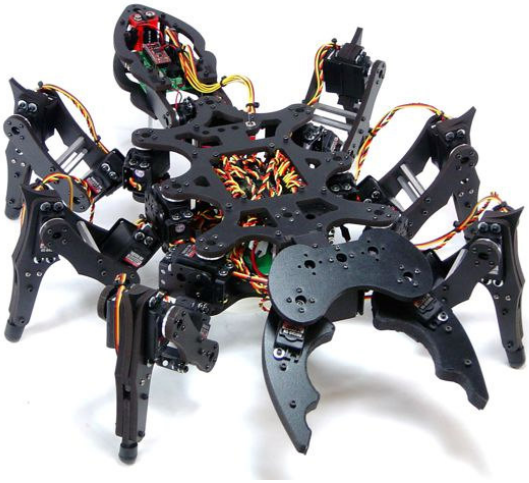
(a)



(b)

Figura II.26 - (a) DLR-Walker (GÖNER, 2008); (b) SILO-6 (DE SANTOS, 2007).

Por fim, cabe ressaltar que nos dias atuais já é possível comprar e montar kits robóticos teleoperados com diversos formatos de locomoção, tamanho e estrutura.



(a)



(b)



(c)

Figura II.27 - (a) Robô formiga (LYNXMOTION, 2012); (b) Phoenix (LYNXMOTION, 2010); (c) NXT Spike (LEGO MINDSTORMS, 2010).

Capítulo III - Cinemática de Manipuladores

Cinemática é o ramo da mecânica que descreve o movimento dos corpos sem relacioná-los com as forças que o causaram. Em outras palavras, é o estudo da *geometria de movimento* (MERIAM, 1994; TEODORESCU, 2007). No caso da cinemática de manipuladores, é a ciência que se refere às propriedades geométricas de movimento e variáveis no tempo (CRAIG, 1989).

III.1. Cinemática direta

III.1.1. Definições preliminares

Letras maiúsculas estarão sempre se referindo a pontos ou corpos, enquanto que as letras minúsculas irão se referir a eixos. Os números serão usados para indicar sistemas de referência. Os vetores podem ser simbolizados tanto por letras maiúsculas quanto por minúsculas, mas sempre estarão representados por um "til" embaixo de suas letras. Um vetor coluna genérico pode ser expresso por $\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T$, dependendo da conveniência.

A notação ${}^{n}\underset{\sim}{P}^{m}$ indica a posição do sistema de referência m em relação ao sistema n, enquanto que ${}^{0}\underset{\sim}{P}^{C}$ pode representar a posição de um corpo ou ponto em relação ao referencial 0. As simbologias ${}^{0}\underset{\sim}{P}^{G_i}$ e ${}^{0}\underset{\sim}{P}^{M_i}$ denotam, respectivamente, a posição do centro de gravidade do corpo i e do motor i no referencial 0 e se justificam, pois elos e motores serão considerados como massas pontuais concentradas nos seus centros de gravidade.

III.1.2. Sistemas de coordenadas referenciais

A cadeia cinemática que compõe um manipulador mecânico é formada pela sequência de corpos conectados por juntas, que por intermédio de atuadores, exercem a movimentação do manipulador (ROMANO, 1994). Na Figura III.1, J_1, J_2 e J_3 representam as juntas de rotação, que são compostas de atuadores (motores de corrente contínua) e sensores de posição e velocidade (encoders), e podem girar de forma independente em torno do seu eixo. L_1, L_2 e L_3 são os corpos da cadeia cinemática, isto é, são os elos de ligação entre as juntas.

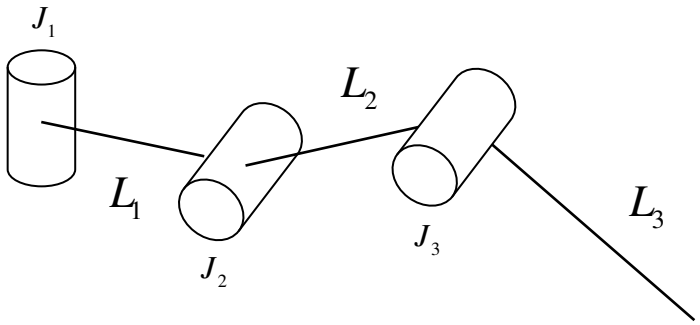


Figura III.1 - Esquema simplificado da perna do hexápode.

A representação completa de um objeto no espaço tridimensional é expressa por sua posição e orientação em relação a um determinado sistema de coordenadas. No caso de um manipulador mecânico, composto por vários corpos em forma de cadeia aberta, a descrição de sua posição e orientação requer além de um referencial inercial, $\{0\}$, um sistema de coordenadas locais em cada uma das juntas.

Para calcular a equações cinemáticas da perna, os sistemas de referência devem ser posicionados corretamente. Como não será simulada a trajetória do corpo do robô, mas somente o movimento da perna, todos os referenciais estarão localizados no mecanismo. Assim, os referenciais $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$ serão posicionados nas juntas 1, 2 e 3, e o referencial $\{3\}$ se localizará na extremidade da perna.

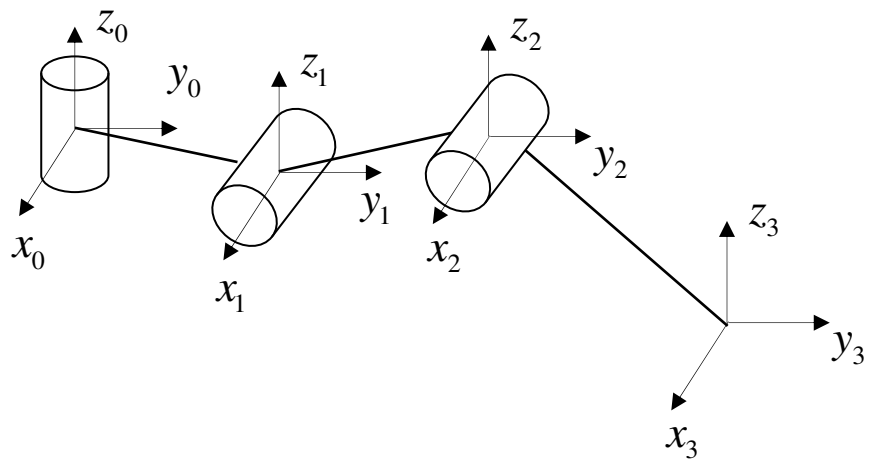


Figura III.2 - Localização dos sistemas de referências.

Os ângulos de rotação serão representados por θ_1, θ_2 e θ_3, e a orientação positiva de cada um deles será definida conforme a Figura III.3.

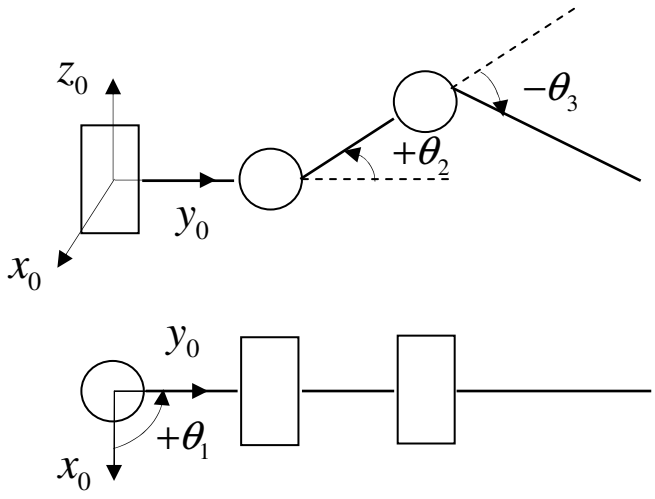


Figura III.3 - Orientação angular: vistas frontal e superior.

III.1.3. Matriz de transformação homogênea

O operador ${}^{n}T_{m}$, denominado *matriz de transformação homogênea*, é uma matriz 4×4 que contém todas as informações sobre a translação e a rotação de um referencial m em um referencial n. Genericamente é definida por

$$ {}^{n}T_{m} = \begin{bmatrix} \left[{}^{n}R_{m} \right]_{3\times3} & \left[{}^{n}\underset{\sim}{P}^{m} \right]_{3\times1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.1} $$

onde ${}^{n}R_{m}$ e ${}^{n}\underset{\sim}{P}^{m}$ correspondem à matriz de rotação e o vetor posição entre os referenciais.

Os parâmetros de Denavit-Hartenberg fornecem as matrizes de transformação homogênea entre dois elos consecutivos. Para controlar a posição da extremidade da perna em relação ao referencial inercial é necessário calcular ${}^{0}T_{3}$, que é dada por

$$ {}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1} \cdot {}^{1}T_{2} \cdot {}^{2}T_{3} \tag{III.2} $$

III.1.4. Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Um manipulador pode ser descrito cinematicamente pelos 4 parâmetros de Denavit-Hartenberg (D-H) apresentados na Tabela III.1 e ilustrados na Figura III.4.

Tabela III.1 - Descrição dos parâmetros D-H.

Parâmetros	Descrição
a_i	Distância de z_{i-1} a z_i medida ao longo de x_i
α_i	Ângulo entre z_{i-1} e z_i ao longo de x_i
d_i	Distância entre x_{i-1} e x_i medida ao longo de z_{i-1}
θ_i	Ângulo entre x_{i-1} e x_i, medido em z_{i-1}

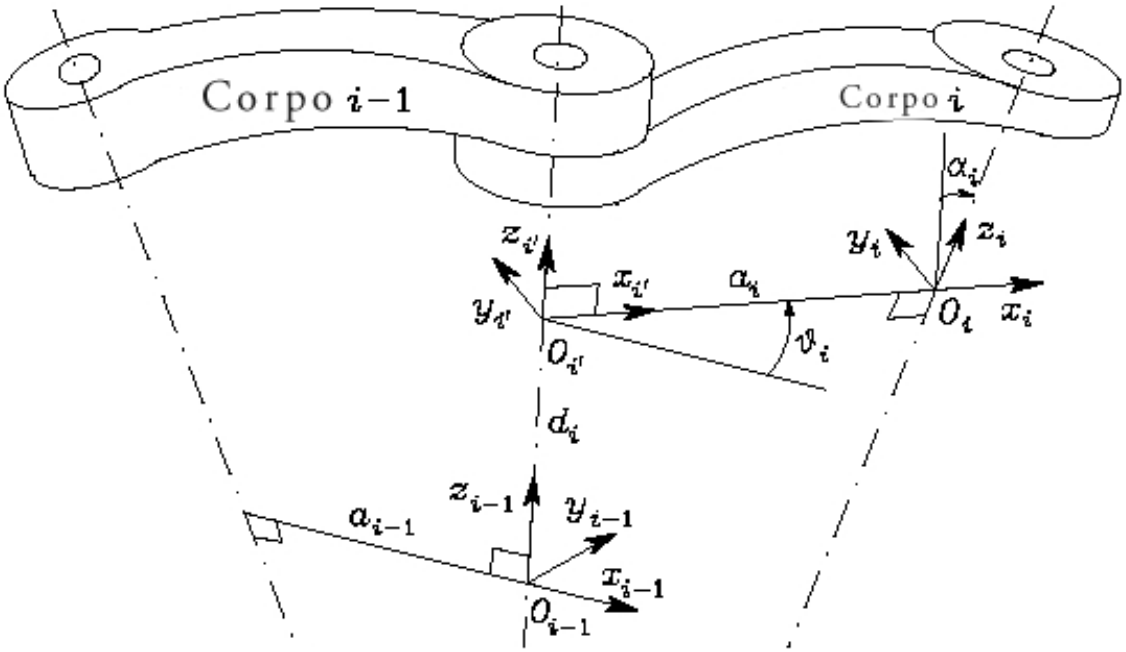


Figura III.4 - Representação dos parâmetros D-H.

Analisando a Figura III.4 verifica-se que o caminho percorrido pelo referencial $i-1$ até coincidir com o referencial i pode ser representado por sucessivas operações de rotação e translação na seguinte ordem:

1) $\mathrm{Rot}(\theta_i, z)$: Rotação de θ_i no eixo z_{i-1}, para alinhar x_{i-1} com x_i.

2) $\mathrm{Trans}(0,0,d_i)$: Translação de d_i ao longo de z_{i-1} para coincidir x_{i-1} e x_i.

3) $\mathrm{Trans}(a_i,0,0)$: Translação de a_i ao longo de x_i, para coincidir as origens dos sistemas de referência $i-1$ e i, e x_{i-1} e x_i.

4) $\mathrm{Rot}(\alpha_i, x_i)$: Rotação de α_i no eixo x_i para coincidir os dois sistemas de referência.

O produto desta sequência de operações resulta na matriz de transformação homogênea entre os referenciais $i-1$ e i. Logo,

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}T_i &= \mathrm{Rot}(\theta_i, z)\cdot \mathrm{Trans}(0,0,d_i)\cdot \mathrm{Trans}(a_i,0,0)\cdot \mathrm{Rot}(\alpha_i, x_i) \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{(III.3)}
$$

III.1.5. Equações cinemáticas

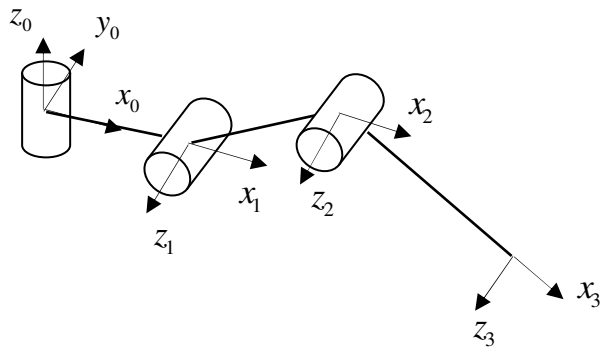


Figura III.5 - Referenciais de acordo com a orientação de D-H.

Tabela III.2 - Parâmetros de D-H.

Elo	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	L_1	0	$\pi/2$	θ_1
2	L_2	0	0	θ_2
3	L_3	0	0	θ_3

Definidos os parâmetros de D-H na Tabela III.2, segue-se de III.3 que:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & L_1 S\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

e

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Logo, de III.2, tem-se,

$$ {}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1\mathrm{C}_{23} & -\mathrm{C}_1\mathrm{S}_{23} & \mathrm{S}_1 & \mathrm{C}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ \mathrm{S}_1\mathrm{C}_{23} & -\mathrm{S}_1\mathrm{S}_{23} & -\mathrm{C}_1 & \mathrm{S}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ \mathrm{S}_{23} & \mathrm{C}_{23} & 0 & L_2\,\mathrm{S}_2 + L_3\,\mathrm{S}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4)} $$

Os símbolos C_1, S_1, C_{23} e S_{23} denotam, respectivamente, $\cos\theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_1$, $\cos\left(\theta_2+\theta_3\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\theta_2+\theta_3\right)$, e serão largamente utilizados ao longo do texto.

Comparando as equações III.1 e III.4, verifica-se que o vetor posição da extremidade da perna em relação ao referencial inercial é dado por:

$$ {}^{0}\underset{\sim}{P}^{3} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ \mathrm{S}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ L_2\,\mathrm{S}_2 + L_3\,\mathrm{S}_{23} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.5)} $$

Dessa forma, dada uma trajetória parametrizada $\lambda(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, os ângulos θ_i, $i = 1,2,3$, podem ser determinados através da cinemática inversa, uma vez que:

$$ \begin{cases} x(t) = \mathrm{C}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ y(t) = \mathrm{S}_1\left(L_1 + L_2\,\mathrm{C}_2 + L_3\,\mathrm{C}_{23}\right) \\ z(t) = L_2\,\mathrm{S}_2 + L_3\,\mathrm{S}_{23} \end{cases} $$

III.2. Cinemática inversa

III.2.1. Cálculo de θ_1

A divisão de $y(t)$ por $x(t)$, resulta em $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}(\theta_1)$, de modo que

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{III.6}$$

III.2.2. Cálculo de θ_2

O procedimento para calcular θ_2 consiste em obter uma equação que só dependa de θ_1 e θ_2, visto que θ_1 já é conhecido. O primeiro passo é isolar os termos L_3C_{23} e L_3S_{23} das equações $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\mathrm{S}_1} - L_1 - L_2\,\mathrm{C}_2 = L_3\,\mathrm{C}_{23} \\ z - L_2\,\mathrm{S}_2 = L_3\,\mathrm{S}_{23} \end{cases}$$

Elevando ao quadrado e somando as equações acima, verifica-se que θ_3 é eliminado na equação resultante.

$$\left(\frac{y}{\mathrm{S}_1}\right)^2 - \frac{2L_1 y}{\mathrm{S}_1} - \left(\frac{2L_2 y}{\mathrm{S}_1}\right)\mathrm{C}_2 + L_1^2 + 2L_1L_2\,\mathrm{C}_2 + L_2^2\,\mathrm{C}_2^2 + z^2 - 2zL_2\,\mathrm{S}_2 + L_2^2\,\mathrm{S}_2^2 = L_3^2$$

Simplificando:

$$\left(\frac{y}{\mathrm{S}_1}\right)^2 - \frac{2L_1 y}{\mathrm{S}_1} - \left(\frac{2L_2 y}{\mathrm{S}_1}\right)\mathrm{C}_2 + L_1^2 + 2L_1L_2\,\mathrm{C}_2 + L_2^2 + z^2 - 2zL_2\,\mathrm{S}_2 = L_3^2$$

Agrupando os termos comuns, a equação reduz-se a

$$A\,\mathrm{C}_2 + B\,\mathrm{S}_2 + C = 0 \tag{III.7}$$

onde

$$\begin{cases} A = 2L_1L_2 - \dfrac{2L_2 y}{\mathrm{S}_1} \\ B = -2zL_2 \\ C = \dfrac{y^2}{\mathrm{S}_1^2} - \dfrac{2L_1 y}{\mathrm{S}_1} + L_1^2 + L_2^2 + z^2 - L_3^2 \end{cases}$$

Resolvendo a Equação III.7 para o seno, obtém-se

$$A\,\mathrm{C}_2 + B\,\mathrm{S}_2 + C = 0 \;\Rightarrow\; A\,\mathrm{C}_2 = -B\,\mathrm{S}_2 - C$$

$$\Rightarrow\; A^2\,\mathrm{C}_2^2 = B^2\,\mathrm{S}_2^2 + 2BC\,\mathrm{S}_2 + C^2$$

$$\Rightarrow\; A^2\left(1-\mathrm{S}_2^2\right) = B^2\,\mathrm{S}_2^2 + 2BC\,\mathrm{S}_2 + C^2$$

$$\Rightarrow\; \left(A^2+B^2\right)\mathrm{S}_2^2 + 2BC\,\mathrm{S}_2 + \left(C^2-A^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{-2BC \pm \sqrt{4B^2C^2 - 4\left(A^2+B^2\right)\left(C^2-A^2\right)}}{2\left(A^2+B^2\right)}$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{-BC \pm \sqrt{B^2C^2 - \left(A^2+B^2\right)\left(C^2-A^2\right)}}{\left(A^2+B^2\right)}$$

Manipulando a mesma Equação III.7, mas resolvendo, agora, para o coseno, o resultado encontrado é análogo.

$$B\,\mathrm{S}_2 = -A\,\mathrm{C}_2 - C \;\Rightarrow\; B^2\,\mathrm{S}_2^2 = A^2\,\mathrm{C}_2^2 + 2AC\,\mathrm{C}_2 + C^2$$

$$\Rightarrow\; \left(A^2+B^2\right)\mathrm{C}_2^2 + 2AC\,\mathrm{C}_2 + \left(C^2-B^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; \cos\theta_2 = \frac{-AC \pm \sqrt{A^2C^2 - \left(A^2+B^2\right)\left(C^2-B^2\right)}}{\left(A^2+B^2\right)}$$

Finalmente, θ_2 é obtido dividindo o seno pelo coseno.

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-BC \pm \sqrt{B^2C^2 - \left(A^2+B^2\right)\left(C^2-A^2\right)}}{-AC \pm \sqrt{A^2C^2 - \left(A^2+B^2\right)\left(C^2-B^2\right)}} \qquad \text{(III.8)}$$

III.2.3. Cálculo de θ_3

O ângulo θ_3 pode ser determinado, basicamente, de duas maneiras distintas. A primeira, e mais simples, consiste em isolar θ_3 na equação $z(t)$, uma vez que θ_1 e θ_2 já são conhecidos. Assim,

$$\theta_3 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{z - L_2 \operatorname{S}_2}{L_3}\right) - \theta_2 \tag{III.9}$$

A segunda maneira é manipulando a equação $z(t)$ de modo a transformá-la na forma da Equação III.7. Para isso deve-se expandir S_{23} em $z(t)$ e agrupar os termos em comum. Assim,

$$\left[L_3 \operatorname{sen}(\theta_2)\right]\cos(\theta_3) + \left[L_3 \cos(\theta_2)\right]\operatorname{sen}(\theta_3) + \left[L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - z\right] = 0$$

Definindo

$$\begin{cases} A = L_3 \operatorname{sen}(\theta_2) \\ B = L_3 \cos(\theta_2) \\ C = L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - z \end{cases}$$

segue-se, de III.8 que

$$\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{-BC \pm \sqrt{B^2C^2 - \left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 - A^2\right)}}{-AC \pm \sqrt{A^2C^2 - \left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 - B^2\right)}} \tag{III.10}$$

III.3. Campo de trabalho

Para determinar completamente o campo de trabalho (workspace) do mecanismo é necessário conhecer os valores referentes aos comprimentos dos elos e variações angulares das juntas. Embora, somente no Capítulo VI que maiores detalhes do projeto serão apresentados, a Tabela III.3 adianta esses valores.

Tabela III.3 - Variação angular aproximada de cada junta.

Elo	Ângulo mínimo	Ângulo máximo	Dimensão [mm]
1	20º	160º	50,81
2	-145º	145º	245,8
3	-150º	150º	435

De acordo com a Figura III.5 e admitindo que o ângulo θ_3 seja sempre negativo, o campo de trabalho do plano *yz* fica assim caracterizado.

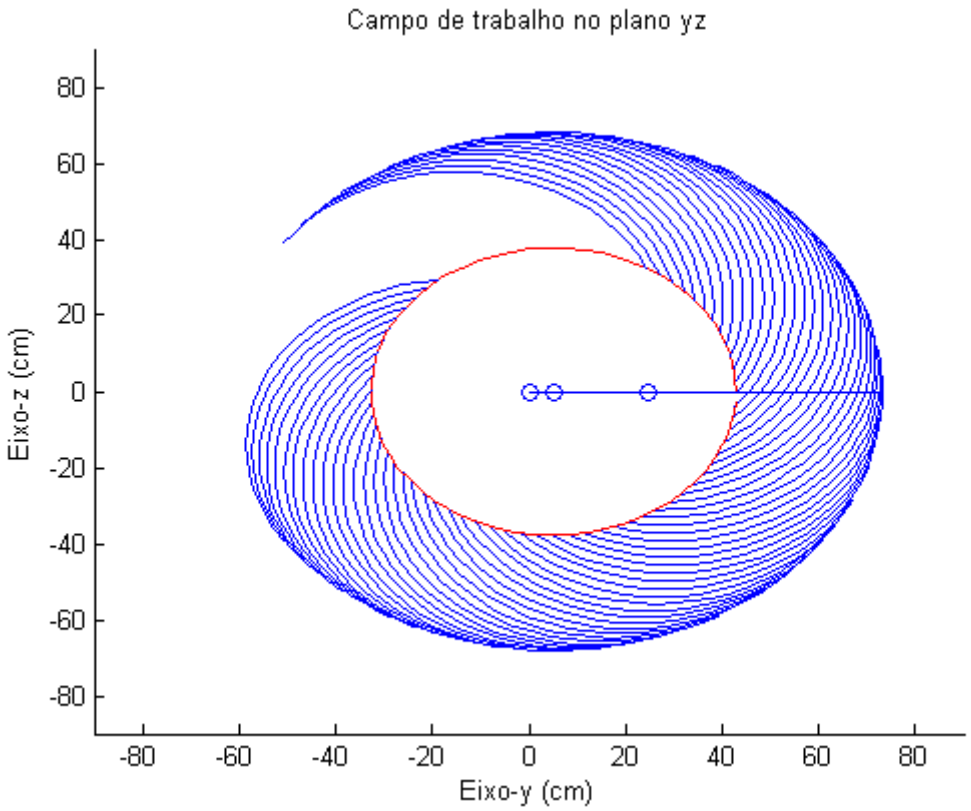


Figura III.6 - Campo de trabalho no plano *yz*.

A curva em vermelho representa o limite inferior do campo de trabalho. No Capítulo IV serão definidas formalmente as configurações singulares, o que reduzirá o campo de trabalho efetivo.

III.4. Torque estático

O torque estático só existe quando o manipulador está parado em alguma configuração genérica e está sujeito somente às forças de seus componentes (não serão consideradas forças externas). Conforme a Figura III.7, somente as juntas 2 e 3 sofrem efeito de torque estático.

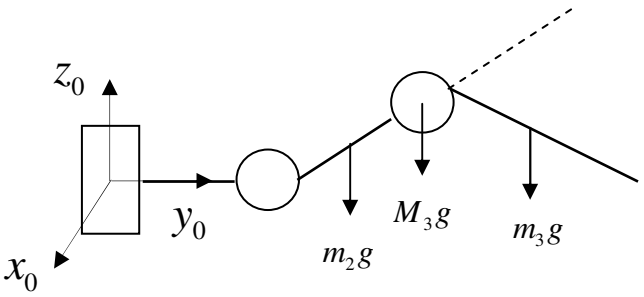


Figura III.7 - Forças externas atuando na perna.

A junta 2 compensa os torques causados pelos pesos dos elos 2 e 3, e do motor 3, de modo que:

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{C_1 L_2 C_2}{2} & \frac{S_1 L_2 C_2}{2} & \frac{L_2 S_2}{2} \\ 0 & 0 & -m_2 g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ C_1 L_2 C_2 & S_1 L_2 C_2 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & -M_3 g \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ C_1\left(L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right) & S_1\left(L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right) & L_2 S_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2} \\ 0 & 0 & -m_3 g \end{vmatrix}$$

$$= \left[L_2 C_2 g\left(\frac{m_2}{2} + M_3 + m_3\right) + \frac{m_3 g L_3 C_{23}}{2} \right]\left(-S_1 \vec{i} + C_1 \vec{j}\right)$$

Seu módulo é dado por

$$\tau_2 = L_2 C_2 g\left(\frac{m_2}{2} + M_3 + m_3\right) + \frac{m_3 g L_3 C_{23}}{2}$$

Por outro lado, a junta 3 só precisa compensar o torque gerado pelo elo 3, e assim:

$$\tau_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{C_1 L_3 C_{23}}{2} & \frac{S_1 L_3 C_{23}}{2} & \frac{L_3 S_{23}}{2} \\ 0 & 0 & -m_3 g \end{vmatrix} = -\frac{m_3 g S_1 L_3 C_{23}}{2}\vec{i} + \frac{m_3 g C_1 L_3 C_{23}}{2}\vec{j}$$

cujo módulo vale

$$\tau_3 = \frac{m_3 g L_3 C_{23}}{2}$$

Verifica-se que o torque simbólico obtido pela simulação em MATLAB® com velocidades e acelerações angulares nulas é idêntico às equações teóricas desenvolvidas acima.

```
>> transpose(torque)

ans =

                                                                                        0
 1/2*m2*g*l2*cos(tt2)+1/2*m3*g*l3*cos(tt2+tt3)+M3*g*l2*cos(tt2)+m3*g*cos(tt2)*l2
                                                              1/2*m3*g*l3*cos(tt2+tt3)
```

Figura III.8 - Torques obtidos em MATLAB® para velocidades angulares nulas.

Capítulo IV - Dinâmica de Robôs

Enquanto a Cinemática estuda a descrição dos movimentos dos corpos sem se preocupar com as causas, a Dinâmica estuda os efeitos que torques e forças imprimem ao movimento de objetos. Neste capítulo, o objetivo principal será a dedução das equações dinâmicas utilizando o método de Lagrange.

IV.1. Movimento dos elos de um robô

Um manipulador é uma cadeia de corpos, denominados de elos, na qual cada um é capaz de se movimentar em relação aos seus vizinhos. Cada elo pode, portanto, apresentar velocidades lineares e angulares. Esta seção apresenta somente os conceitos básicos para o entendimento do capítulo. Uma abordagem mais completa e aprofundada por ser obtida nos livros citados nas referências bibliográficas no final do trabalho, como por exemplo, CRAIG (1989).

IV.1.1. Velocidade angular entre elos

Conforme a Figura III.2, cada elo está conectado a uma junta de rotação, nas quais estão fixos os sistemas de referências. Dessa forma, o elo i se move em relação ao sistema $\{i-1\}$. Como o modelo apresentado se baseia somente em juntas de rotação, a velocidade angular de cada elo se confunde com a velocidade angular da junta de rotação a ele atrelado, o que facilita os cálculos.

Será denotado por ${}^{i-1}\underset{\sim}{\omega}^{i}$ a velocidade angular do elo i em relação ao elo $i-1$, e ${}^{i}\underset{\sim}{\omega}^{i}$ a velocidade da junta i no referencial $\{i\}$. Pela Figura III.5 verifica-se, que:

$$ {}^{1}\underset{\sim}{\omega}^{1} = {}^{0}\underset{\sim}{\omega}^{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \; {}^{2}\underset{\sim}{\omega}^{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \text{ e } {}^{3}\underset{\sim}{\omega}^{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{IV.1} $$

A velocidade do elo i em relação ao referencial inercial é dada por

$$ {}^{0}\underset{\sim}{\omega}^{i} = {}^{0}\underset{\sim}{\omega}^{1} + {}^{1}\underset{\sim}{\omega}^{2} + {}^{2}\underset{\sim}{\omega}^{3} + \cdots + {}^{i-1}\underset{\sim}{\omega}^{i} \tag{IV.2} $$

De modo que

$$
\begin{aligned}
{}^0\underset{\sim}{\omega}^2 &= {}^0\underset{\sim}{\omega}^1 + {}^1\underset{\sim}{\omega}^2 \\
&= {}^0\underset{\sim}{\omega}^1 + {}^0R_1 \cdot {}^2\underset{\sim}{\omega}^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_1\dot{\theta}_2 \\ -C_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0\underset{\sim}{\omega}^3 &= {}^0\underset{\sim}{\omega}^1 + {}^1\underset{\sim}{\omega}^2 + {}^2\underset{\sim}{\omega}^3 \\
&= {}^0\underset{\sim}{\omega}^1 + {}^0R_1 \cdot {}^2\underset{\sim}{\omega}^2 + {}^0R_2 \cdot {}^3\underset{\sim}{\omega}^3 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1\dot{\theta}_2 \\ -C_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_1\dot{\theta}_{23} \\ -C_1\dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Resumindo.

$$
{}^0\underset{\sim}{\omega}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},\ {}^0\underset{\sim}{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 S_1 \\ -\dot{\theta}_2 C_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ e } {}^0\underset{\sim}{\omega}^3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{23} S_1 \\ -\dot{\theta}_{23} C_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{IV.3}
$$

Uma vez que os vetores ${}^2\underset{\sim}{\omega}^2$ e ${}^3\underset{\sim}{\omega}^3$ são paralelos, era de se esperar que seus resultados fossem semelhantes. As velocidades dadas por IV.3 serão usadas no cálculo das energias cinéticas dos elos.

IV.1.2. Velocidades no espaço cartesiano e das juntas

Definição IV.1. A *Matriz Jacobiana*, ou simplesmente, *Jacobiana*, é formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Se $\varphi: R^n \to R^n$ é uma função diferenciável tal que $\varphi = \left(\varphi_1\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \cdots, \varphi_n\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)\right)$, então, a Jacobiana de φ é a matriz quadrada de dimensão $n \times n$ dada por:

$$J_{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Definição IV.2. Denomina-se por *Jacobiano* ao determinante da Matriz Jacobiana.

Como a função vetorial descreve a trajetória da perna e é expressa em coordenadas cartesianas (x, y, z), é de se esperar que a Matriz Jacobiana do modelo tenha dimensão 3×3. Uma definição alternativa, envolvendo a geometria do manipulador é dada por CRAIG (1989). Segundo o autor, o número de colunas da Jacobiana é igual ao número de juntas do manipulador, e o número de linhas é igual ao número de graus de liberdade, confirmando a dimensão 3×3.

A cinemática direta do manipulador descreve uma relação entre as coordenadas de posição das juntas, $\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$, e as coordenadas de posição e orientação do pé do robô, $\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T$. Isso significa que $\underset{\sim}{P}$ depende diretamente das posições das juntas, ou seja, $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\theta})$. Em notação matricial:

$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x(\underset{\sim}{\theta}) \\ P_y(\underset{\sim}{\theta}) \\ P_z(\underset{\sim}{\theta}) \end{bmatrix}$$

A derivada de $\underset{\sim}{P}$ no tempo resulta no vetor $\underset{\sim}{V}$ das velocidades lineares da ponta da perna. O uso da regra da cadeia permite desenvolver a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{V} = \dot{\underset{\sim}{P}} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3}\frac{d\theta_3}{dt} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3}\frac{d\theta_3}{dt} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3}\frac{d\theta_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.4)}$$

Obtém-se, assim, uma relação entre as velocidades angulares das juntas de rotação e as velocidades cartesianas da ponta da perna. Definindo o vetor $\begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} & \frac{d\theta_2}{dt} & \frac{d\theta_3}{dt} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T = \underset{\sim}{\dot{\theta}}$, tem-se

$$\underset{\sim}{V} = J\underset{\sim}{\dot{\theta}} \tag{IV.5}$$

A Matriz Jacobiana, portanto, aplica uma transformação linear nas velocidades angulares das juntas, relacionando-as com as velocidades cartesianas. Da Equação III.5 segue-se que

$$J = \begin{bmatrix} -S_1\left(L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & -C_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -L_3C_1S_{23} \\ C_1\left(L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & -S_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -L_3S_1S_{23} \\ 0 & L_2C_2 + L_3C_{23} & L_3C_{23} \end{bmatrix} \tag{IV.6}$$

IV.1.3. Velocidades angulares

Como o vetor $\underset{\sim}{V}$ é determinado pela trajetória imposta na simulação, os valores desejados, ou ideais, das velocidades angulares podem ser obtidos, matematicamente, através da relação

$$\underset{\sim}{\dot{\theta}} = J^{-1}\underset{\sim}{V} \tag{IV.7}$$

Os sinais de saída do manipulador são enviados pelos sensores na forma de posição e velocidade angulares das juntas de rotação. Minimizar a diferença entre o valor de $\underset{\sim}{\dot{\theta}}$ desejado e o valor real, enviado pelo sensor, é fundamental na implementação do controle. Essa teoria será desenvolvida no Capítulo V.

IV.1.4. Singularidades

Uma matriz é dita singular se o seu determinante é nulo. Em outras palavras, uma matriz é dita singular quando não admite inversa. Como o cálculo das velocidades das juntas depende da matriz inversa da Jacobiana, é fundamental que se verifique, dentro do campo de trabalho do manipulador, quais os pontos onde o Jacobiano é nulo. Tais pontos são chamados de pontos singulares.

O estudo das singularidades é importante, pois nesses pontos há a perda de mobilidade do manipulador. Além da cinemática inversa admitir infinitas soluções, criando o problema de redundância na simulação, o espaço das juntas adquire elevadas taxas de variação, tornando o manipulador incontrolável. Por isso, as trajetórias devem ser definidas de modo que a extremidade da perna esteja a uma distância segura dos pontos singulares (ROMANO, 1994).

Os pontos singulares do modelo proposto são obtidos fazendo-se $Det(J)=0$. O desenvolvimento desta equação produz o seguinte resultado:

$$S_3 = 0 \text{ ou } L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23} = 0$$

A condição $S_3 = 0$ resulta em $\theta_3 = 0$, pois $0 \le \theta_3 < 180^0$, enquanto que a segunda condição resulta em $P_x = 0$, uma vez que $P_x = C_1\left(L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23}\right)$.

Portanto, deve-se evitar trajetórias nas quais a ponta do manipulador passe pela extremidade limite do campo de trabalho do manipulador e pelo eixo z do referencial 0.

IV.1.5. Aceleração angular

A aceleração angular das juntas é dada pela equação

$$\ddot{\underset{\sim}{\theta}} = J^{-1}\left(\ddot{\underset{\sim}{P}} - \dot{J}\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \tag{IV.8}$$

uma vez que $\dot{\underset{\sim}{P}} = J\dot{\underset{\sim}{\theta}} \Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{P}} = \dot{J}\dot{\underset{\sim}{\theta}} + J\ddot{\underset{\sim}{\theta}}$.

Dentre as referências consultadas, nenhuma apresenta uma fórmula para o cálculo da derivada da Matriz Jacobiana no tempo. O desenvolvimento abaixo é uma tentativa de obter essa relação sem o compromisso de se obter a resposta mais simplificada ou a mais otimizada.

Como os elementos de J dependem, exclusivamente, das posições angulares, isto é,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{12}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{13}(\underset{\sim}{\theta}) \\ J_{21}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{22}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{23}(\underset{\sim}{\theta}) \\ J_{31}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{32}(\underset{\sim}{\theta}) & J_{33}(\underset{\sim}{\theta}) \end{bmatrix}$$

segue-se, que

$$\dot{J}_{ij} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_3}\frac{d\theta_3}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{ij}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}}$$

Assim

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{11}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{21}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{31}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{32}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} & \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{13}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{23}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial J_{33}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\theta}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} J_1 \dot{\underset{\sim}{\theta}} & J_2 \dot{\underset{\sim}{\theta}} & J_3 \dot{\underset{\sim}{\theta}} \end{bmatrix} \tag{IV.9}$$

onde J_i é a Jacobiana da i-ésima coluna de J.

Dessa forma, o problema do cálculo de $\dot{J}$ fica reduzido à obtenção de matrizes jacobianas das colunas de J, o que simplifica as equações. As matrizes usadas na simulação dinâmica serão, portanto:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -C_1\left(L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & S_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & L_3S_1S_{23} \\ -S_1\left(L_1 + L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & -C_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -L_3C_1S_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} S_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -C_1\left(L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & -L_3C_1C_{23} \\ -C_1\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -S_1\left(L_2C_2 + L_3C_{23}\right) & -L_3S_1C_{23} \\ 0 & -\left(L_2S_2 + L_3S_{23}\right) & -L_3S_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} L_3S_1S_{23} & -L_3C_1C_{23} & -L_3C_1C_{23} \\ -L_3C_1S_{23} & -L_3S_1C_{23} & -L_3S_1C_{23} \\ 0 & -L_3S_{23} & -L_3S_{23} \end{bmatrix}$$

IV.2. Dinâmica de manipuladores

A dinâmica de manipuladores estuda a relação entre o movimento dos corpos que formam a cadeia cinemática e as forças e torques aplicados nas juntas através dos atuadores a esses associados. Conceitos como Tensor de Inércia, Energia Cinética e Potencial são essenciais para o desenvolvimento das equações de movimento de Lagrange.

IV.2.1. Tensor de inércia

O momento de inércia mede a distribuição de massa de uma partícula, ou corpo, em torno de um eixo de rotação. Quanto maior for esse valor, mais difícil será fazê-lo girar. Um corpo rígido sem vínculos pode girar livremente em três dimensões e dado um referencial inercial qualquer, é importante saber caracterizar a variação da distribuição de massa desse corpo rígido em torno desses eixos.

Seja C um corpo rígido de massa m e volume V. Dados um referencial $\{i\}$, que pode ou não pertencer ao corpo, e um ponto genérico $\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T$ de C em relação à origem do referencial, define-se o tensor de inércia do ponto $\underset{\sim}{P}$ em relação ao referencial $\{i\}$ como

$$ {}^{i}\mathrm{I}^{\underset{\sim}{P}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{IV.10} $$

onde,

$$ \begin{cases} I_{xx} = \int_C \left(P_y^2 + P_z^2 \right) dm \\ I_{yy} = \int_C \left(P_x^2 + P_z^2 \right) dm \\ I_{zz} = \int_C \left(P_x^2 + P_y^2 \right) dm \end{cases} \text{ e } \begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = -\int_C \left(P_x P_y \right) dm \\ I_{xz} = I_{zx} = -\int_C \left(P_x P_z \right) dm \\ I_{yz} = I_{zy} = -\int_C \left(P_y P_z \right) dm \end{cases} $$

Os elementos I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são chamados de *momentos de inércia*, enquanto que I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} são os *produtos de inércia*. O tensor de inércia tem como propriedade ser uma matriz simétrica (TENENBAUM, 1997).

IV.2.2. Energia cinética

A energia cinética total de um manipulador é a soma das energias de todos os elos em relação ao referencial inercial $\{0\}$, sendo a energia total do i-ésimo elo dada por

$$\mathrm{K}_i = \frac{1}{2} m_i \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_i} \right)^T \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_i} \right) + \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right)^T \cdot \left({}^0\mathrm{I}^{G_i} \right) \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right) \qquad \text{(IV.11)}$$

Na expressão acima, o primeiro termo é a energia cinética devido à velocidade linear do centro de massa do elo i, ${}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_i}$, e o segundo termo é a energia devido à velocidade de rotação deste elo. ${}^0\mathrm{I}^{G_i}$ denota o tensor de inércia do elo i, com respeito ao seu centro de gravidade, em relação ao referencial inercial.

As tabelas fornecem informações sobre momentos e produtos de inércia em relação a um referencial fixo ao próprio corpo, cujo tensor será denotado por ${}^{G_i}\mathrm{I}^{G_i}$, enquanto que o cálculo da energia deve ser feito em relação ao referencial inercial. Logo, para obter o tensor ${}^0\mathrm{I}^{G_i}$, é preciso aplicar uma mudança de base em ${}^{G_i}\mathrm{I}^{G_i}$, segundo a expressão

$${}^0\mathrm{I}^{G_i} = \left({}^0R_i \right)^T \cdot {}^{G_i}\mathrm{I}^{G_i} \cdot \left({}^0R_i \right) \qquad \text{(IV.12)}$$

onde ${}^0R_i$ representa a rotação do elo i em relação ao referencial inercial (ROMANO, 1994).

No modelo proposto, devido ao fato do referencial inercial estar fixo ao motor 1, este não produz energia cinética, o motor 2 só possui energia devido a rotação e o motor 3 contribui com energias de rotação e translação. O tensor de inércia respectivo a cada motor, em relação ao referencial $\{0\}$, será denotado ${}^0\mathrm{I}^{M_i}$. O elo 1 só apresenta energia devido a rotação, enquanto que os elos 2 e 3 possuem rotação e translação.

A expressão de K, fica, então, determinada assim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} = {} & \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^1 \right)^T \cdot {}^0\mathrm{I}^{G_1} \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^1 \right) && \text{(Rotação do elo 1)} \\
& + \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^1 \right)^T \cdot {}^0\mathrm{I}^{M_2} \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^1 \right) && \text{(Rotação do motor 2)} \\
& + \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^2 \right)^T \cdot {}^0\mathrm{I}^{G_2} \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^2 \right) && \text{(Rotação do elo 2)} \\
& + \frac{1}{2} m_2 \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_2} \right)^T \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_2} \right) && \text{(Translação do elo 2)} \\
& + \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^2 \right)^T \cdot {}^0\mathrm{I}^{M_3} \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^2 \right) && \text{(Rotação do motor 3)} \\
& + \frac{1}{2} M_3 \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{M_3} \right)^T \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{M_3} \right) && \text{(Translação do motor 3)} \\
& + \frac{1}{2} \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^3 \right)^T \cdot {}^0\mathrm{I}^{G_3} \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^3 \right) && \text{(Rotação do elo 3)} \\
& + \frac{1}{2} m_3 \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_3} \right)^T \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_3} \right) && \text{(Translação do elo 3)}
\end{aligned}$$

O resultado obtido desse somatório é apresentado abaixo:

$$\mathrm{K} = \frac{m_1 L_1^2}{6}\dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 L_2^2}{6}\left(\dot{\theta}_1^2 C_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \frac{m_2}{2}\left[\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{L_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2\right]$$
$$+ \frac{M_3 L_2^2}{6}\left(\dot{\theta}_1^2 C_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \frac{M_3}{2}\left[\left(L_1 + L_2 C_2\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2\right] + \frac{m_3 L_3^2}{6}\left[\dot{\theta}_1^2 C_{23}^2 + \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)^2\right]$$
$$+ \frac{m_3}{2}\left[\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + C_3 L_2 L_3\right)\dot{\theta}_2^2 + \frac{L_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + \left(\frac{L_3^2}{2} + C_3 L_2 L_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right]$$

IV.2.3. Energia potencial

A energia potencial total do manipulador é a soma das energias de cada elo, sendo a energia do i-ésimo elo é dada por

$$\mathrm{P}_i = -m_i \left(\underset{\sim}{g}\right)^T \cdot \left({}^0\underset{\sim}{P}^{G_i}\right) \tag{IV.13}$$

onde, $\underset{\sim}{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T$ é o vetor gravitacional.

Somente os elos 2 e 3, e o motor 3 contribuem para energia potencial, e, portanto,

$$\mathrm{P} = \frac{m_2 g L_2 S_2}{2} + M_3 g L_2 S_2 + m_3 g\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)$$

IV.2.4. Equações de movimento de Lagrange

Dentre as principais metodologias que descrevem os efeitos dinâmicos nos corpos de um manipulador, as equações de Lagrange serão o foco deste trabalho.

Define-se por Lagrangeano a função L resultante da diferença entre a energia cinética e a potencial do manipulador, ou seja

$$L = \mathrm{K} - \mathrm{P} \tag{IV.14}$$

Com os valores de K e P obtidos acima, o Lagrangeano fica determinado.

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{m_1 L_1^2}{6}\dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 L_2^2}{6}\left(\dot{\theta}_1^2 C_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \frac{m_2}{2}\left[\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{L_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2\right] \\
& + \frac{M_3 L_2^2}{6}\left(\dot{\theta}_1^2 C_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + \frac{M_3}{2}\left[\left(L_1 + L_2 C_2\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2\right] + \frac{m_3 L_3^2}{6}\left[\dot{\theta}_1^2 C_{23}^2 + \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)^2\right] \\
& + \frac{m_3}{2}\left[\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + C_3 L_2 L_3\right)\dot{\theta}_2^2 + \frac{L_3^2}{4}\dot{\theta}_3^2 + \left(\frac{L_3^2}{2} + C_3 L_2 L_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right] \\
& - \frac{m_2 g L_2 S_2}{2} - M_3 g L_2 S_2 - m_3 g\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Para uma cadeia cinemática formada por n corpos rígidos de coordenadas generalizadas $\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n\end{bmatrix}^T$, pode-se analisar a dinâmica de um corpo i com massa m_i e volume V_i a partir do Lagrangeano, segundo a fórmula:

$$
\underset{\sim}{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\theta}} \tag{IV.15}
$$

onde $\left[\underset{\sim}{\tau}\right]_{n\times 1}$.

As equações do modelo proposto neste trabalho foram calculadas analiticamente sem auxílio de programas de linguagem simbólica. A forma como são apresentadas não é a mais simplificada, mas isso foi feito com o intuito de auxiliar nas contas futuras.

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = {} & \left[\frac{m_1 L_1^2}{3} + M_2 L_1^2 + \frac{m_2 L_2^2 C_2^2}{3} + m_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right)^2 + M_3 L_2^2 C_2^2 + M_3\left(L_1 + L_2 C_2\right)^2 + \frac{m_3 L_3^2 C_{23}^2}{3}\right. \\
& \left. + m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)^2\right]\ddot{\theta}_1 - \left[\frac{2 m_2 L_2^2 S_2 C_2}{3} + m_2 L_2 S_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) + 2 M_3 L_2^2 S_2 C_2\right. \\
& \left. + 2 M_3 L_2 S_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) + \frac{2 m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + 2 m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
& - \left[\frac{2 m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + m_3 L_3 S_{23}\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3
\end{aligned}
$$

$$\tau_2 = \left[\frac{7m_2L_2^2}{12} + 2M_3L_2^2 + \frac{m_3L_3^2}{3} + m_3\left(L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + C_3L_2L_3\right)\right]\ddot{\theta}_2 + \left[\frac{m_3L_3^2}{3} + \frac{m_3}{2}\left(\frac{L_3^2}{2} + C_3L_2L_3\right)\right]\ddot{\theta}_3$$
$$-\left(m_3L_2L_3S_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - \left(\frac{m_3L_2L_3S_3}{2}\right)\dot{\theta}_3^2 + \left[\frac{m_2L_2^2S_2C_2}{3} + \frac{m_2L_2S_2}{2}\left(L_1 + \frac{L_2C_2}{2}\right) + M_3L_2^2S_2C_2\right.$$
$$\left. + M_3L_2S_2\left(L_1 + L_2C_2\right) + \frac{m_3L_3^2S_{23}C_{23}}{3} + m_3\left(L_1 + L_2C_2 + \frac{L_3C_{23}}{2}\right)\left(L_2S_2 + \frac{L_3S_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1^2$$
$$+ \frac{m_2gL_2C_2}{2} + MgL_2C_2 + m_3g\left(L_2C_2 + \frac{L_3C_{23}}{2}\right)$$

$$\tau_3 = \left[\frac{m_3L_3^2}{3} + \frac{m_3}{2}\left(\frac{L_3^2}{2} + C_3L_2L_3\right)\right]\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{7m_3L_3^2}{12}\right)\ddot{\theta}_3$$
$$+\left[\frac{m_3L_3^2S_{23}C_{23}}{3} + \frac{m_3L_3S_{23}}{2}\left(L_1 + L_2C_2 + \frac{L_3C_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_3S_3L_2L_3}{2}\right)\dot{\theta}_2^2$$
$$+\frac{m_3gL_3C_{23}}{2}$$

IV.3. Equações dinâmicas na forma matricial

As equações em forma matricial são fundamentais na implementação do controle. Sua forma compacta permite que se avalie, separadamente, a contribuição dinâmica da inércia, das forças de Coriolis e da gravidade no manipulador, permitindo um melhor entendimento das relações que determinam o seu movimento (CRAIG, 1989).

IV.3.1. Definições preliminares

O desenvolvimento a seguir busca formalizar o conceito das equações dinâmicas na forma matricial. Para isso, serão necessárias duas definições disponíveis em STRANG (1986), para uma melhor compreensão do texto.

Definição IV.3. Toda *forma quadrática* está relacionada a uma matriz simétrica, segundo a relação

$$f = \left(\underset{\sim}{q}\right)^T \cdot A \cdot \left(\underset{\sim}{q}\right)$$

onde $f : R^n \to R$, $\left[A\right]_{n\times n}$ e $\left[\underset{\sim}{q}\right]_{n\times 1}$.

Definição IV.4. Seja A uma matriz simétrica. A é dita *definida positiva* se, e somente se $\left(\underset{\sim}{q}\right)^T \cdot A \cdot \left(\underset{\sim}{q}\right) > 0$, para todo vetor $\underset{\sim}{q}$ não-nulo.

IV.3.2. Energia cinética na forma compacta

A energia cinética de um manipulador é uma forma quadrática, conforme pode se observar no desenvolvimento da Equação IV.11.

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_i &= \frac{1}{2}\left[m_i \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_i} \right)^T \cdot \left({}^0\dot{\underset{\sim}{P}}^{G_i} \right) + \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right)^T \cdot \left({}^0\mathrm{I}^{G_i} \right) \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[m_i \left(J_i \dot{\underset{\sim}{\theta}} \right)^T \cdot \left(J_i \dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) + \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right)^T \cdot \left({}^0\mathrm{I}^{G_i} \right) \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[m_i \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}^T J_i^T \right) \cdot \left(J_i \dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) + \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right)^T \cdot \left({}^0\mathrm{I}^{G_i} \right) \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[m_i \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right)^T \left(J_i^T \cdot J_i \right) \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) + \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right)^T \cdot \left({}^0\mathrm{I}^{G_i} \right) \cdot \left({}^0\underset{\sim}{\omega}^i \right) \right]
\end{aligned}$$

Isso significa que, qualquer manipulador com n graus de liberdade, composto de elos rígidos conectados sem atrito, sempre pode ter a sua energia cinética expressa na forma

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) \tag{IV.16}$$

onde $\left[M \right]_{n \times n}$ é uma matriz especial, denominada *Matriz de Inércia*, que possui duas propriedades muito importantes.

Propriedade IV.1. M é simétrica, pois tanto ${}^0\mathrm{I}^{G_i}$, quanto $J_i^T \cdot J_i$ são simétricos.

Propriedade IV.2. M é definida positiva, pois resulta do fato de ser simétrica e da energia cinética ser sempre positiva (Definição IV.4)

Essas propriedades serão fundamentais na implementação do controle, pois em algum momento será necessário o cálculo da inversa da matriz M e o fato dela ser definida positiva garante que sua inversa nunca será uma matriz nula.

IV.3.3. Equações dinâmicas definidas por matrizes especiais

Substituindo a energia cinética definida por IV.16 no Lagrangeano, obtém-se a seguinte expressão

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) - \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\theta} \right)$$

Com isso, as equações de movimento são representadas por

$$\underset{\sim}{\tau} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right]\right] - \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] + \frac{\partial \mathrm{P}(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$$

Com o intuito de simplificar essa expressão, primeiramente deve-se mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] = M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$$

De fato, dados $\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) = \sum_i \sum_j M_{ij}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_i$ e $\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_n} \end{bmatrix}^T$, segue-se que, para um valor de k, fixo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_k}\left[\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_k}\left[\sum_j M_{kj}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k + \sum_i M_{ik}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_i\right] \\
&= \sum_j M_{kj}\dot{\theta}_j + \sum_i M_{ik}\dot{\theta}_i \quad \left(M_{kj} = M_{jk}\right) \\
&= 2\sum_j M_{kj}\dot{\theta}_j
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\left[\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1}\left[\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_n}\left[\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sum_j M_{1j}\dot{\theta}_j \\ \vdots \\ 2\sum_j M_{nj}\dot{\theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}\dot{\theta}_1 + \cdots M_{1n}\dot{\theta}_n \\ \vdots \\ M_{n1}\dot{\theta}_1 + \cdots M_{nn}\dot{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \\
&= M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\underset{\sim}{\theta}}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right]\right] = \frac{d}{dt}\left[M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\right] = \dot{M} \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) + M \cdot \left(\ddot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$$

Reagrupando,

$$\underset{\sim}{\tau} = M \cdot \ddot{\underset{\sim}{\theta}} + \left[\dot{M} \cdot \dot{\underset{\sim}{\theta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}} \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}^T \cdot M \cdot \dot{\underset{\sim}{\theta}} \right) \right] + \frac{\partial \mathrm{P}(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$$

Definindo $C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) = \dot{M} \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\theta}} \left(\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)^T \cdot M \cdot \left(\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \right)$ e $G(\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\partial \mathrm{P}(\underset{\sim}{\theta})}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$, fica provado que para qualquer manipulador suas equações dinâmicas podem sempre ser escritas na forma

$$\underset{\sim}{\tau} = M\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \cdot \ddot{\underset{\sim}{\theta}} + C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \cdot \dot{\underset{\sim}{\theta}} + G\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \tag{IV.17}$$

onde $\left[M\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \right]_{n \times n}$ é denominada de Matriz de Inércia, $\left[C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \right]_{n \times n}$ é a matriz que contém as acelerações centrífugas e de Coriolis e $\left[G\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \right]_{n \times 1}$ é o vetor que contém os termos gravitacionais.

Uma vez calculadas as equações de torque, τ_i, as matrizes M, C e G podem ser determinadas. Segundo KELLY (2005) e SICILIANO (2008), enquanto M e G são bem definidas e únicas, a matriz C pode ser expressa de diversas formas. Apesar disso, as equações dinâmicas não são invalidadas, pois qualquer que seja a sua configuração, o produto de $C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$ por $\dot{\underset{\sim}{\theta}}$ é único. Os mesmos autores sugerem o seguinte procedimento para o cálculo dos elementos dessa matriz:

$$C_{jk}\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} c_{1\,jk}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \\ c_{2\,jk}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \\ \vdots \\ c_{njk}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \end{bmatrix}^T \dot{\underset{\sim}{\theta}} \tag{IV.18}$$

onde $c_{ijk}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)$ são denominados de *Símbolos de Christoffel* de primeiro tipo e são definidos pela expressão

$$c_{ijk}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{ki}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{ij}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)}{\partial \theta_k} \right] \tag{IV.19}$$

A demonstração do processo de construção dos símbolos de Christoffel encontra-se em SPONG (1989).

Um desenvolvimento alternativo para o que foi demonstrado nessa seção é apresentado por PAUL (1981) e FU (1987). O método consiste em transformar todas as operações envolvendo matrizes em somatórios e operar diretamente com eles.

IV.3.4. As matrizes M, C e G

M e G são resultado de uma análise simples das equações τ_i. A Matriz de Inércia tem os seguintes coeficientes:

$$M_{11} = \frac{m_1 L_1^2}{3} + M_2 L_1^2 + \frac{m_2 L_2^2 C_2^2}{3} + m_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right)^2 + M_3 L_2^2 C_2^2 + M_3\left(L_1 + L_2 C_2\right)^2 + \frac{m_3 L_3^2 C_{23}^2}{3} + m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)^2$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{22} = \frac{7 m_2 L_2^2}{12} + 2 M_3 L_2^2 + \frac{m_3 L_3^2}{3} + m_3\left(L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + C_3 L_2 L_3\right)$$

$$M_{23} = \frac{m_3 L_3^2}{3} + \frac{m_3}{2}\left(\frac{L_3^2}{2} + C_3 L_2 L_3\right)$$

$$M_{31} = 0$$

$$M_{32} = \frac{m_3 L_3^2}{3} + \frac{m_3}{2}\left(\frac{L_3^2}{2} + C_3 L_2 L_3\right)$$

$$M_{33} = \frac{7 m_3 L_3^2}{12}$$

Note que, de fato, M é uma matriz simétrica. Já o vetor G é dado por:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{m_2 g L_2 C_2}{2} + MgL_2C_2 + m_3 g\left(L_2C_2 + \dfrac{L_3C_{23}}{2}\right) \\ \dfrac{m_3 g L_3 C_{23}}{2} \end{bmatrix}$$

Dentre as formas de se expressar a matriz C, uma delas é especial, pois satisfaz uma propriedade muito específica, que é característica de manipuladores que só possuem juntas de rotação. KELLY (2005) e SICILIANO (2008) demonstram que, nessas condições, sempre existe C tal que a matriz $\dot{M}(\underset{\sim}{\theta}) - 2C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$ é anti-simétrica. A matriz C definida abaixo respeita essa propriedade.

$$\begin{aligned} C_{11} = -\Bigg[& \frac{m_2 L_2^2 S_2 C_2}{3} + \frac{m_2 L_2 S_2}{2}\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) + M_3 L_2^2 S_2 C_2 + M_3 L_2 S_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) \\ & + \frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + 2m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)\Bigg]\dot{\theta}_2 \\ & - \left[\frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + \frac{m_3 L_3 S_{23}}{2}\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = -\Bigg[& \frac{m_2 L_2^2 S_2 C_2}{3} + \frac{m_2 L_2 S_2}{2}\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) + M_3 L_2^2 S_2 C_2 + M_3 L_2 S_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) \\ & + \frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + 2m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)\Bigg]\dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

$$C_{13} = -\left[\frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + \frac{m_3 L_3 S_{23}}{2}\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1$$

$$\begin{aligned} C_{21} = \Bigg[& \frac{m_2 L_2^2 S_2 C_2}{3} + \frac{m_2 L_2 S_2}{2}\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) + M_3 L_2^2 S_2 C_2 + M_3 L_2 S_2\left(L_1 + \frac{L_2 C_2}{2}\right) \\ & + \frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + 2m_3\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\left(L_2 S_2 + \frac{L_3 S_{23}}{2}\right)\Bigg]\dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

$$C_{22} = -\left(\frac{m_3 L_2 L_3 S_3}{2}\right)\dot{\theta}_3$$

$$C_{23} = -\left(\frac{m_3 L_2 L_3 S_3}{2}\right)\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)$$

$$C_{31} = \left[\frac{m_3 L_3^2 S_{23} C_{23}}{3} + \frac{m_3 L_3 S_{23}}{2}\left(L_1 + L_2 C_2 + \frac{L_3 C_{23}}{2}\right)\right]\dot{\theta}_1$$

$$C_{32} = \left(\frac{m_3 L_2 L_3 S_3}{2}\right)\dot{\theta}_2$$

$$C_{33} = 0$$

Capítulo V - Controle de Manipuladores

V.1. Introdução

Dependendo da aplicação, um manipulador pode ser classificado em duas categorias: os que se movem livremente sem contato físico com o meio ambiente, e os que interagem por meio da aplicação de forças. O contato físico resulta na geração de forças e torques externos, problema que não será abordado neste texto. Também não serão considerados os problemas de flexibilidade dos elos e o atrito entre as juntas. Em outras palavras, a simulação analisará apenas o estudo do movimento em cadeia aberta sem a interação com o meio.

Dadas as equações de movimento, o objetivo do controle é manter a resposta dinâmica do manipulador de acordo com o critério de performance estabelecido. Em geral o problema de controle consiste de duas etapas: obter os modelos dinâmicos do manipulador e usar leis de controle nesses modelos para obter a performance ou resposta desejada do sistema.

O manipulador proposto neste trabalho será instrumentado com atuadores (motores de corrente contínua) e sensores de posição e movimento angulares (encoders). Como não há interação de forças com o meio, as únicas variáveis de saída, y, que necessitam ser controladas serão as posições e velocidades das juntas, ou seja, $y = y\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$. Por outro lado, como o movimento das juntas se dá através do torque transmitido pelos atuadores, a variável de entrada, u, é uma função, exclusivamente, deste parâmetro, isto é, $u = u\left(\underset{\sim}{\tau}\right)$.

V.2. Controle do torque computado

Um manipulador pode ser controlado de duas maneiras básicas: controle de posição (ponto-a-ponto), ou controle de movimento (tracking). O primeiro tipo, mais simples consiste em fazer com que o manipulador passe através de um conjunto discreto de pontos no seu campo de trabalho sem a necessidade de seguir uma trajetória de referência. O segundo tipo é fazê-lo se movimentar por uma trajetória contínua.

Para que o robô possa executar qualquer tipo de trabalho pelo método do controle de movimento, é necessário posicioná-lo no lugar correto a todo instante. Por isso faz-se necessário definir uma curva contínua, parametrizada no tempo, que forneça as posições desejadas. Dessa forma, para que os atuadores possam realizar trabalho, é necessário um sistema de controle que faça a conversão entre as coordenadas de posição e velocidade para o torque desejado. Por fim, para que o controle tenha uma boa performance, é fundamental que o erro entre os valores de posição e velocidade desejadas com os valores emitidos pelos sensores convirja para zero. Sempre haverá erro devido a problemas de atrito e não

linearidades desconsideradas na análise dinâmica e uma forma de minimizá-lo é através do método de retroalimentação (feedback) das variáveis de entrada.

O problema central no projeto de um sistema de controle é garantir que ele vai atender às especificações de desempenho impostas, e o critério mais importante para isso é garantir que seja estável. Segundo SLOTINE (1991), KHALIL (1996) e LEWIS (2004), um sistema é dito estável, qualitativamente, se, dada qualquer condição inicial próxima ao ponto de operação, seu movimento também permanece perto desse ponto. Uma definição semelhante é dada por CRAIG (1989), que afirma ser estável um sistema se os seus erros se mantêm relativamente pequenos ou tendem a zero em um intervalo de tempo razoável, mesmo na presença de distúrbios moderados.

A instabilidade de um sistema pode resultar em um comportamento inadequado, ou até mesmo imprevisível do manipulador, não atendendo ao objetivo a que foi proposto, podendo até danificar componentes e mecanismos. Portanto, o projeto de controle deve garantir, não só a estabilidade, mas também provar que os resultados, em malha fechada são satisfatórios.

O uso de técnicas de controle linear somente é válido quando o sistema estudado pode ser modelado por equações diferenciais lineares, que não é o caso das equações de movimento de manipuladores. Usar um controlador linear para movimentar um robô acarreta em perda de precisão a medida em que a velocidade de movimento aumenta. Isso acontece porque o controlador linear despreza os efeitos não lineares, enquanto que as forças de centrífugas e de Coriolis variam com o quadrado da velocidade. Por outro lado, um controlador não-linear, de conceito simples, também chamado de *Controle do Torque Computado* (computed-torque control), é capaz de compensar essas não-linearidades permitindo movimentos mais precisos mesmo com velocidades mais altas e campos de trabalho mais amplos. (SLOTINE, 1991)

V.3. Controle de 1 junta

V.3.1. Motor de corrente contínua

Em manipuladores os torques são gerados pelos atuadores, que convertem os sinais de entrada em torques como variável de saída. Isso significa que os atuadores possuem sua própria dinâmica e, em alguns casos podem ser modelados por equações matemáticas, como é o caso dos motores de corrente contínua, ou motor DC.

Basicamente, um motor DC consiste de um estator, que é a parte fixa do motor, e um rotor, que é o responsável pela rotação do eixo. O estator fica fixo à armadura e contém imãs

que produzem campo magnético dentro do rotor. O rotor contém, além do eixo, o indutor (enrolamento) que conduz a corrente quando o motor é alimentado.

V.3.2. Relações básicas

Como o motor é acionado pela voltagem produzindo torque, pode-se afirmar que há uma relação proporcional entre eles, assumida linear.

$$\tau_m = K_a i_a \tag{V.1}$$

Fisicamente falando, o motor está sujeito à ação de duas forças proporcionais ao produto da densidade de fluxo magnético e o comprimento do enrolamento: a força induzida pela corrente e a produzida pela rotação rotor, denominada *força contra-eletromotriz*. Para haver equilíbrio do sistema, essas forças precisam se contrabalancear e, para isso, devem atuar em sentidos contrários. Como o rotor gira devido ao campo magnético induzido pela corrente, esse movimento de rotação age como um gerador, desenvolvendo uma voltagem na armadura. Isso significa que essa voltagem é proporcional à velocidade de rotação do motor, ou seja

$$v = K_b \dot{\theta}_m \tag{V.2}$$

onde K_b é a constante devido à força contra-eletromotriz (NISE, 2011).

Do exposto, conclui-se que o motor DC pode ser modelado como um circuito RL, cuja equação característica é dada por

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \dot{\theta}_m \tag{V.3}$$

onde R_a e L_a são a resistência e a indutância da armadura (FU, 1987).

V.3.3. Torque no eixo de cargas

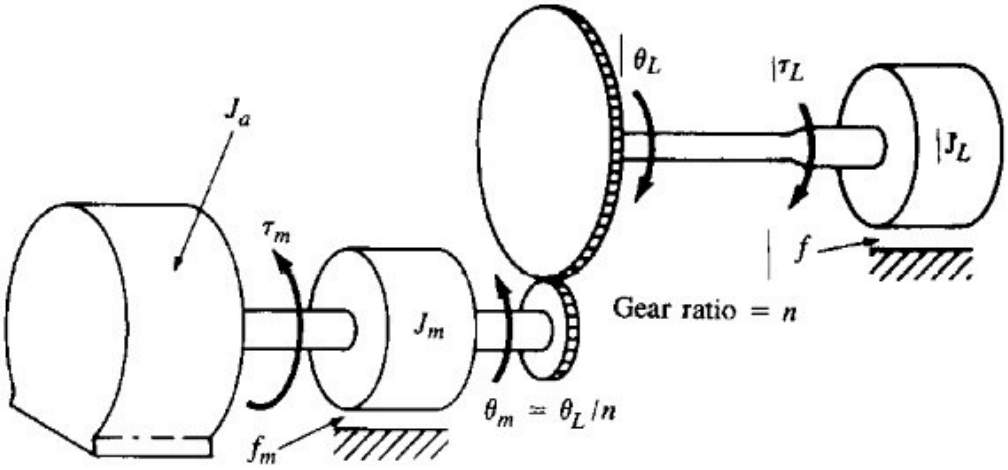


Figura V.1 - Motor com redução (FU, 1987).

Quando o objetivo é transmitir torques mais elevados, é comum utilizar redutores acoplados aos motores. O eixo do motor fica então ligado a um trem de engrenagens e outro eixo, denominado *eixo de cargas*, é o responsável pela transmissão do torque (Figura V.1). Basicamente o eixo de carga gira a uma velocidade menor que o eixo do motor, sendo proporcional ao coeficiente de redução n.

$$\theta_L = n\theta_m, \; n < 1 \tag{V.4}$$

Além da inércia da carga, J_L, e do atrito dinâmico nas juntas f_L, as equações de controle devem considerar também a inércia do rotor, J_m, e o atrito dinâmico, f_m, produzido pelo seu efeito de rotação. O torque total no eixo do motor depende, portanto, da carga e das características do motor. A sua expressão, cujo desenvolvimento completo se encontra em FU (1987), é dada por

$$\tau(t) = J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + f_{eff}\dot{\theta}_m(t) \tag{V.5}$$

onde $J_{eff} = J_m + n^2 J_L$ e $f_{eff} = f_m + n^2 f_L$ correspondem ao momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso efetivos do sistema

V.3.4. Funções de transferência

A aplicação da Transformada de Laplace nas equações V.1, V.3 e V.5, com condições iniciais nulas, produz o seguinte resultado

$$\begin{cases} T(s) = K_a I_a \\ V_a(s) = R_a I_a + sL_a I_a + sK_b \Theta_m(s) \\ T(s) = s^2 J_{eff} \Theta_m(s) + sf_{eff} \Theta_m(s) \end{cases} \tag{V.6}$$

A combinação dessas equações resulta na função de transferência entre o ângulo do eixo do motor e a voltagem. Como a variável de controle é o ângulo do eixo de saída do motor, a relação V.4 deve ser usada para que se obtenha

$$\frac{\Theta_L(s)}{V_a(s)} = \frac{nK_a}{s\left[\left(J_{eff}L_a\right)s^2 + \left(L_a f_{eff} + R_a J_{eff}\right)s + R_a f_{eff} + K_a K_b\right]} \tag{V.7}$$

Em alguns casos, devido ao valor da indutância ser muito pequeno, é comum desprezá-la, e a Equação V.7 reduz-se a

$$\frac{\Theta_L(s)}{V_a(s)} = \frac{nK_a}{\left(R_a J_{eff}\right)s^2 + \left(R_a f_{eff} + K_a K_b\right)s} \tag{V.8}$$

Cabe notar que V.7 e V.8 são respostas em malha aberta do sistema. Na seção seguinte quando o controlador for implementado, será necessário fechar a malha com uma retroalimentação unitária.

V.3.5. Controlador proporcional-derivativo

O objetivo do controle de posição é fazer com que as coordenadas reais do motor sigam as coordenadas desejadas. A técnica consiste em usar o erro entre as posições reais e as ideais para produzir uma voltagem apropriada. Em outras palavras, deve-se aplicar uma lei de controle na qual a voltagem transmitida ao motor é linearmente proporcional ao erro de posição.

Segundo FU (1987), uma forma de incrementar a resposta do sistema é adicionando um ganho devido ao erro entre a velocidade real e a desejada. Com isso, a lei de controle fica assim definida:

$$V_a(t) = \frac{K_P e(t) + K_D \dot{e}(t)}{n} \tag{V.9}$$

onde $e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t)$, $\dot{e}(t) = \dot{\theta}_L^d(t) - \dot{\theta}_L(t)$, K_P é ganho proporcional e K_D o ganho derivativo.

Aplicando a Transformada de Laplace em V.9 e substituindo V_a em V.7, obtém-se a função de transferência entre a posição real e o erro, em malha aberta. Para calcular a função de transferência entre a posição real e a desejada será necessário fechar a malha com retroalimentação unitária. O resultado obtido é dado por:

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{(K_a K_D)s + K_a K_P}{s\left[(J_{eff} L_a)s^2 + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s + R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_D\right] + K_a K_P} \tag{V.10}$$

Equivalentemente, desprezando a indutância:

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{(K_a K_D)s + K_a K_P}{(R_a J_{eff})s^2 + (R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_D)s + K_a K_P} \tag{V.11}$$

V.3.6. Critérios de estabilidade

As equações V.7 e V.10 sugerem que o motor de corrente contínua pode ser modelado como um sistema de ordem 3. Como o coeficiente associado ao termo de grau 3 depende do produto da inércia do motor, que é da ordem de 10^{-6}, pela sua indutância, que é da ordem de 10^{-4}, é razoável considerar esse coeficiente como desprezível reduzindo a ordem desse sistema para 2. Assim, segundo OGATA (2003) e NISE (2011), a função de transferência V.11 satisfaz a equação

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{V.12}$$

onde ω_n é a frequência natural de oscilação do sistema e ξ é o coeficiente de amortecimento. Logo,

$$\omega_n^2 = \frac{K_a K_P}{J_{eff} R_a} \tag{V.13}$$

e

$$2\xi\omega_n = \frac{R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_D}{J_{eff} R_a} \tag{V.14}$$

Os ganhos proporcionais e o coeficiente de amortecimento são obtidos de V.13 e V.14.

$$K_P = \frac{\omega_n^2 J_{eff} R_a}{K_a} \tag{V.15}$$

$$\xi = \frac{R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_D}{2\sqrt{K_a K_P J_{eff} R_a}} \geq 1 \tag{V.16}$$

Para FU (1987), por razões de segurança o sistema não pode ter uma resposta sub-amortecida se aplicada uma função degrau. Para que ele tenha uma boa performance é preciso que seja criticalmente amortecido ou super-amortecido, conforme a Equação V.16. Dessa restrição determinam-se os ganhos derivativos.

$$K_D = \frac{2\sqrt{K_a K_P J_{eff} R_a} - R_a f_{eff} - K_a K_b}{K_a} \tag{V.17}$$

V.4. Controle de múltiplas juntas

V.4.1. Lei de controle

Considere o modelo dinâmico de um manipulador apresentado pela Eq. IV.17, reproduzida abaixo

$$\underset{\sim}{\tau} = M\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\cdot\ddot{\underset{\sim}{\theta}} + C\left(\underset{\sim}{\theta},\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)\cdot\dot{\underset{\sim}{\theta}} + G\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \tag{V.18}$$

Dado um conjunto de funções vetoriais limitadas $\underset{\sim}{\theta}_d$, $\dot{\underset{\sim}{\theta}}_d$ e $\ddot{\underset{\sim}{\theta}}_d$ denotadas por posição, velocidade e aceleração desejadas das juntas de rotação, objetiva-se encontrar uma função vetorial $\underset{\sim}{\tau}$ tal que as coordenadas reais das juntas, $\underset{\sim}{\theta}$ e $\dot{\underset{\sim}{\theta}}$, sigam $\underset{\sim}{\theta}_d$ e $\dot{\underset{\sim}{\theta}}_d$ de forma acurada. A essa função vetorial $\underset{\sim}{\tau}$ denomina-se *lei de controle*.

Em outras palavras, o objetivo do controle de movimento consiste em determinar uma lei tal que:

$$\lim_{t\to\infty} \underset{\sim}{\bar{\theta}}(t) = 0 \text{ e } \lim_{t\to\infty} \dot{\underset{\sim}{\bar{\theta}}}(t) = 0 \tag{V.19}$$

onde $\underset{\sim}{\bar{\theta}} = \theta_d(t) - \theta(t)$ e $\dot{\underset{\sim}{\bar{\theta}}} = \dot{\theta}_d(t) - \dot{\underset{\sim}{\theta}}(t)$ denotam, respectivamente, os erros de posição e velocidades angulares das juntas.

Segundo CRAIG (1989), como o problema do controle de um manipulador é do tipo múltiplas-entradas e múltiplas-saídas (MIMO), o controlador deve ser capaz não somente de linearizar o sistema, mas também de desacoplar as equações envolvidas. A lei de controle proposta pelo autor é da forma

$$\underset{\sim}{\tau} = A \cdot \underset{\sim}{\tau'} + \beta \tag{V.20}$$

onde $\underset{\sim}{\tau}$, $\underset{\sim}{\tau'}$ e β são vetores $n\times 1$ e A é uma matriz $n\times n$. Fazendo

$$\begin{cases} A = M\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \\ \underset{\sim}{\tau'} = \ddot{\underset{\sim}{\theta}}_d + K_D \cdot \dot{\underset{\sim}{\bar{\theta}}} + K_P \cdot \underset{\sim}{\bar{\theta}} \\ \beta = C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \cdot \dot{\underset{\sim}{\theta}} + G\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \end{cases}$$

obtém-se

$$\underset{\sim}{\tau} = M\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \cdot \left[\ddot{\underset{\sim}{\theta}}_d + K_D \cdot \dot{\underset{\sim}{\bar{\theta}}} + K_P \cdot \underset{\sim}{\bar{\theta}} \right] + C\left(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}\right) \cdot \dot{\underset{\sim}{\theta}} + G\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \tag{V.21}$$

Na equação acima, $\left[K_P\right]_{n\times n}$ e $\left[K_D\right]_{n\times n}$ são as matrizes de ganhos proporcional e derivativo. Os ganhos são valores determinados pelo controlador que visam uma otimização da simulação do sistema. Embora não exista uma regra para determinar esses valores, será demonstrado mais adiante que um depende do outro e, como o objetivo é desacoplar as equações de movimento, a melhor maneira de se obter isso é escolhendo matrizes K_P e K_D diagonais.

FU (1987), KELLY (2005) e SICILIANO (2008) denominam a lei de controle V.21 por *controle do torque computado*. O diagrama de blocos representativo é apresentado na Figura V.2.

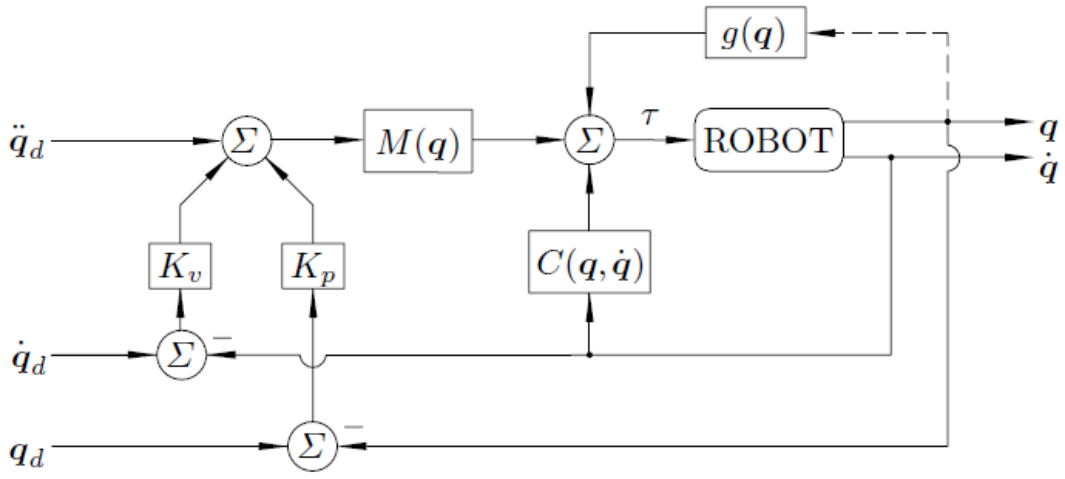


Figura V.2 - Diagrama de blocos do controlador (KELLY, 2005).

V.4.2. Equação diferencial do erro

A comparação entre V.21 com a expressão do torque dinâmico, V.18, resulta na equação

$$M\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\cdot\left[\ddot{\underset{\sim}{\theta}}+K_D\cdot\dot{\underset{\sim}{\theta}}+K_P\cdot\underset{\sim}{\theta}\right]=\underset{\sim}{0}$$

Como M é definida positiva (resultado obtido no capítulo anterior), então ela sempre admite inversa, de modo que, a pré-multiplicação da expressão acima por $M^{-1}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\cdot$ resulta em:

$$\ddot{\underset{\sim}{\theta}}+K_D\cdot\dot{\underset{\sim}{\theta}}+K_P\cdot\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{(V.22)}$$

A equação diferencial V.22 é linear na variável $\underset{\sim}{\theta}$ e segundo BOYCE (1998), sempre será possível escolher ganhos convenientes para que suas soluções sejam convergentes.

Para que haja convergência, as soluções do sistema em malha fechada devem ser conjugados complexos situados no semi-plano esquerdo do plano de fases. Isso só vai ocorrer quando o sistema for sub-amortecido, ou seja, $0<\xi<1$ (OGATA, 2003).

Por fim, comparando V.22 e V.12, obtém-se

$$K_D^2=4\xi^2K_P \qquad \text{(V.23)}$$

e, conforme mencionado anteriormente, K_P e K_D estão, de fato, relacionados entre si.

V.5. Convergência no sentido de Lyapunov

O objetivo desta seção é mostrar a convergência do sistema apresentado neste trabalho, de acordo com a teoria de Lyapunov. A solução apresentada é uma versão adaptada de KELLY (2005). Ao texto original foram inseridos comentários e demonstrações adicionais. As definições de estabilidade e os conceitos relevantes estão no Anexo A.

Primeiro é preciso verificar que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema. De fato, reescrevendo a Eq. V.22 em termos de vetores de estado $\left[\underset{\sim}{\bar{\theta}} \quad \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right]^T$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\theta}} \\ \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}} \\ -K_P \cdot \underset{\sim}{\bar{\theta}} - K_D \cdot \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I \\ -K_P & -K_D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\theta}} \\ \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\end{bmatrix} \tag{V.24}$$

Verifica-se, portanto, que a origem, $\left[\underset{\sim}{\bar{\theta}} \quad \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right]^T = \underset{\sim}{0}$, é solução do sistema, pois a sua substituição em V.24 produz vetores nulos como resposta. Suponha agora, por absurdo, que $\left[\underset{\sim}{\bar{\theta}}_1 \quad \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}_1\right]^T$ seja outra solução do sistema, diferente da origem. Então,

$$\begin{bmatrix}0 & I \\ -K_P & -K_D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\theta}}_1 \\ \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}_1 = \underset{\sim}{0} \\ -K_P \cdot \underset{\sim}{\bar{\theta}}_1 - K_D \cdot \underbrace{\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}}_{=\underset{\sim}{0}} = \underset{\sim}{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}_1 = \underset{\sim}{0} \\ K_P \cdot \underset{\sim}{\bar{\theta}}_1 = \underset{\sim}{0}\end{cases}$$

Como K_P é diagonal e foi projetada para ser uma matriz de elementos positivos, pois corresponde aos ganhos do sistema, ela é definida positiva e, portanto, sempre admite inversa. Logo, a origem é o único ponto de equilíbrio desse sistema.

Teorema V.1. (Rayleigh-Ritz) Seja $\left[A\right]_{n\times n}$ uma matriz real, simétrica e definida positiva. Se $\lambda_{máx}\left(A\right)$ e $\lambda_{min}\left(A\right)$ denotam o maior e o menor autovalor de A, então, para qualquer $\underset{\sim}{x} \in R^n$,

$$\lambda_{min}\left(A\right)\left\|\underset{\sim}{x}\right\|^2 \le \underset{\sim}{x}^T \cdot A \cdot \underset{\sim}{x} \le \lambda_{máx}\left(A\right)\left\|\underset{\sim}{x}\right\|^2$$

■

Seja α um escalar real, que satisfaça

$$0 < \alpha < \lambda_{\min}\left(K_D\right)$$

onde K_D é diagonal positiva. Multiplique ambos os lados da desigualdade por $\underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x}$, de modo a obter

$$\alpha \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \; < \; \lambda_{min}\left(K_D\right) \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \tag{V.25}$$

Dado que K_D é uma matriz simétrica definida positiva, a aplicação do Teorema V.1, reduz V.25 a

$$\lambda_{min}\left(K_D\right) \left\| \underset{\sim}{x} \right\|^2 \; \leq \; \underset{\sim}{x}^T \cdot K_D \cdot \underset{\sim}{x}$$

Como, por definição, $\left\| \underset{\sim}{x} \right\|^2 = \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x}$, segue-se que:

$$\lambda_{min}\left(K_D\right) \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \; \leq \; \underset{\sim}{x}^T \cdot K_D \cdot \underset{\sim}{x} \tag{V.26}$$

Comparando V.25 e V.26

$$\alpha \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \; < \; \lambda_{min}\left(K_D\right) \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \; \leq \; \underset{\sim}{x}^T \cdot K_D \cdot \underset{\sim}{x}$$

ou seja,

$$\alpha \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} \; < \; \underset{\sim}{x}^T \cdot K_D \cdot \underset{\sim}{x} .$$

Como $\alpha \underset{\sim}{x}^T \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^T \cdot \alpha I \cdot \underset{\sim}{x}$, conclui-se que

$$\underset{\sim}{x}^T \cdot \left[K_D - \alpha I \right] \cdot \underset{\sim}{x} > 0 \tag{V.27}$$

que implica em $K_D - \alpha I$ ser uma matriz definida positiva.

Considere agora, a seguinte função candidata de Lyapunov.

$$V\left(\underset{\sim}{\bar{\theta}},\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\theta}}\\ \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}K_P+\alpha K_D & \alpha I\\ \alpha I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\theta}}\\ \underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\end{bmatrix} \qquad (V.28)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\bar{\theta}}\right]^T\left[\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\bar{\theta}}\right]+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\bar{\theta}}^T\left[K_P+\alpha K_D-\alpha^2 I\right]\underset{\sim}{\bar{\theta}}$$

Note que o primeiro termo da função é positivo por definição, uma vez que, qualquer que seja o vetor $\underset{\sim}{x}$, a relação $\underset{\sim}{x}^T\cdot\underset{\sim}{x}=\left\|\underset{\sim}{x}\right\|^2\geq 0$ é sempre verdadeira. Por outro lado, uma vez que, $K_P+\alpha K_D-\alpha^2 I=K_P+\alpha\left[K_D-\alpha I\right]$, ou seja, é soma de matrizes definidas positivas, conclui-se que o segundo termo também é positivo, por se tratar de uma forma quadrática (Definição IV.4). Segue-se, portanto que $V\left(\underset{\sim}{\bar{\theta}},\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right)$ é uma função globalmente definida positiva (Definição A.8, (ii)).

O próximo passo, para concluir a demonstração é mostrar que a derivada no tempo de V.28 é globalmente definida negativa (definições A.8, (ii) e A.10).

Propriedade V.1. Se $\underset{\sim}{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$ e $\underset{\sim}{y}=\begin{bmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{bmatrix}^T$, são vetores diferenciáveis, e A é uma matriz diagonal, então são válidas as relações:

(i) $\underset{\sim}{x}^T\cdot\underset{\sim}{y}=\sum_i x_i y_i=\sum_i y_i x_i=\underset{\sim}{y}^T\cdot\underset{\sim}{x}$

(ii) $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}^T\cdot\underset{\sim}{x}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_i x_i^2\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_i 2x_i\dot{x}_i\right]=\underset{\sim}{x}^T\cdot\underset{\sim}{\dot{x}}$

(iii) $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}^T\cdot\left[A_{ii}\right]\cdot\underset{\sim}{x}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_i A_{ii}x_i^2\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_i 2A_{ii}x_i\dot{x}_i\right]=\underset{\sim}{x}^T\cdot\left[A_{ii}\right]\cdot\underset{\sim}{\dot{x}}$

Pelos itens (ii) e (iii) da Propriedade V.1, tem-se:

$$\dot{V}\left(\underset{\sim}{\bar{\theta}},\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right)=\left[\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\bar{\theta}}\right]^T\left[\underset{\sim}{\ddot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}\right]+\underset{\sim}{\bar{\theta}}^T\cdot\left[K_P+\alpha K_D-\alpha^2 I\right]\cdot\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}$$
$$=\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}^T\cdot\underset{\sim}{\ddot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}^T\cdot\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}+\alpha\underset{\sim}{\bar{\theta}}^T\cdot\underset{\sim}{\ddot{\bar{\theta}}}+\underset{\sim}{\bar{\theta}}^T\cdot\left[K_P+\alpha K_D\right]\cdot\underset{\sim}{\dot{\bar{\theta}}}$$

Isolando $\ddot{\underset{\sim}{\theta}}$ na Equação V.22 e substituindo em $\dot{V}\left(\underset{\sim}{\theta},\dot{\underset{\sim}{\theta}}\right)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\bar{\underset{\sim}{\theta}},\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}\right) &= \dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}^T\left[-K_D\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} - K_P\bar{\underset{\sim}{\theta}}\right] + \alpha\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}^T\cdot\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} + \alpha\bar{\underset{\sim}{\theta}}^T\left[-K_D\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} - K_P\bar{\underset{\sim}{\theta}}\right] + \bar{\underset{\sim}{\theta}}^T\cdot\left[K_P + \alpha K_D\right]\cdot\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} \\ &= \dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}^T\left[-K_D\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} + \alpha I\right]\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} + \underbrace{\bar{\underset{\sim}{\theta}}^T K_P\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} - \dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}^T K_P\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}}_{=0} - \alpha\bar{\underset{\sim}{\theta}}^T K_P\bar{\underset{\sim}{\theta}} \\ &= -\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}^T\left[K_P - \alpha I\right]\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}} - \alpha\bar{\underset{\sim}{\theta}}^T K_P\bar{\underset{\sim}{\theta}} \\ &= -\begin{bmatrix}\bar{\underset{\sim}{\theta}} \\ \dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\alpha K_P & 0 \\ 0 & K_P - \alpha I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\underset{\sim}{\theta}} \\ \dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Como $K_P - \alpha I$ e αK_P são definidas positivas, por construção, segue-se que $\dot{V}\left(\bar{\underset{\sim}{\theta}},\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}\right)$ é globalmente definida negativa, e pelo Teorema A.1, o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Capítulo VI - Projeto Mecânico

Os sistemas robóticos de locomoção por pernas possuem vantagens em relação aos veículos com rodas devido a uma maior adaptabilidade em terrenos irregulares. Por outro lado, quanto maior é a mobilidade do sistema, mais complexo fica o controle, o robô fica mais pesado e o consumo energético é maior. O presente capítulo se propõe a apresentar um mecanismo articulado de três graus de liberdade para ser utilizado como perna de um robô hexápode.

VI.1. Estudo de modelos de pernas

VI.1.1. Atuadores pneumáticos

Ao longo dos anos diversos projetos para pernas de robôs foram propostos. Antes dos motores elétricos se tornarem difundidos, os tipos de acionamento mais comum eram os pneumáticos e os hidráulicos, atuando como músculos artificiais.

Os músculos artificiais foram desenvolvidos na década de 50, na tentativa de simular os músculos humanos (KLUTE, 1999). Constituem fontes alternativas de projeto, pois são feitos de materiais leves e podem ser usados em operações que necessitam de precisão ou delicadeza. Porém, apresentam como desvantagens o difícil controle, devido ao fato de sua constituição ser altamente não-linear e precisam de um compressor para funcionar (DAERDEN, 2002).

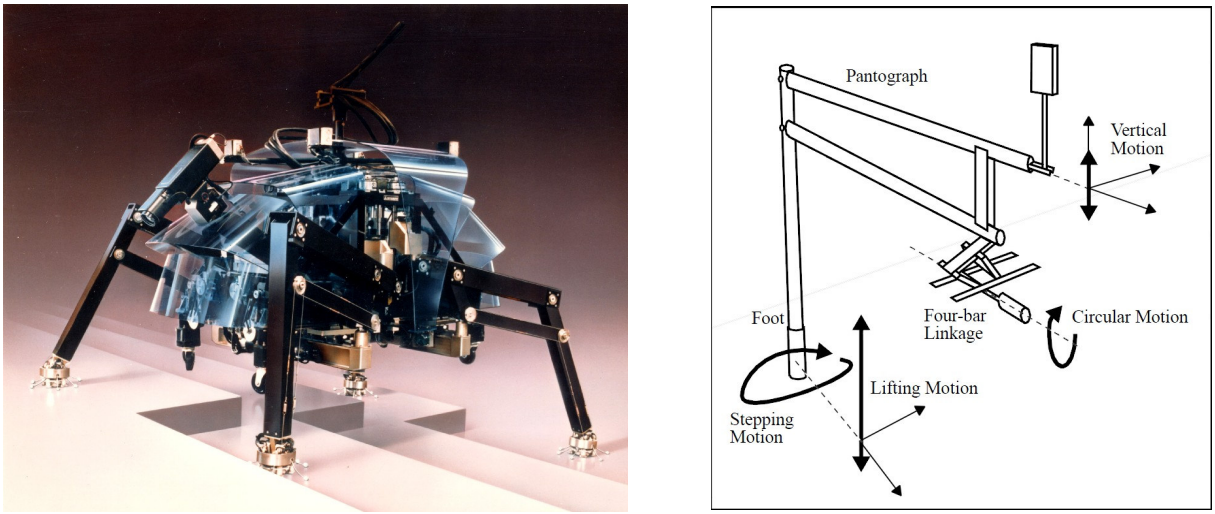
Os atuadores pneumáticos foram amplamente utilizados nos robôs da Waseda University, durante a década de 70, mas com a difusão dos motores elétricos e com o avanço dos computadores caíram em desuso. Atualmente, com o avanço nas pesquisas de novos materiais, voltaram ter destaque no meio científico (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, 2003) e voltaram a ser usados no desenvolvimento de robôs, como por exemplo, o hexápode AJAX, inspirado na barata (KINGSLEY, 2005).

VI.1.2. Mecanismo pantográfico

O uso do mecanismo pantográfico em projetos de robótica móvel é muito difundido, sendo utilizado desde as épocas mais remotas da década de 70 até os dias atuais. Segundo BINNARD (1995), essa preferência se explica devido ao fato de ser um mecanismo simples, produzindo um movimento linear do pé, o que facilita o controle, e também porque que ele proporciona um maior campo efetivo de trabalho.

Os mais comuns são os modelos adaptados do mecanismo pantográfico proposto por Shigley, em 1960. Denominado de PANTOMEC, esses sistema permite que, com

acionamentos simples, a extremidade da perna se mova em um eixo cartesiano tridimensional (HIROSE et al, 2009).



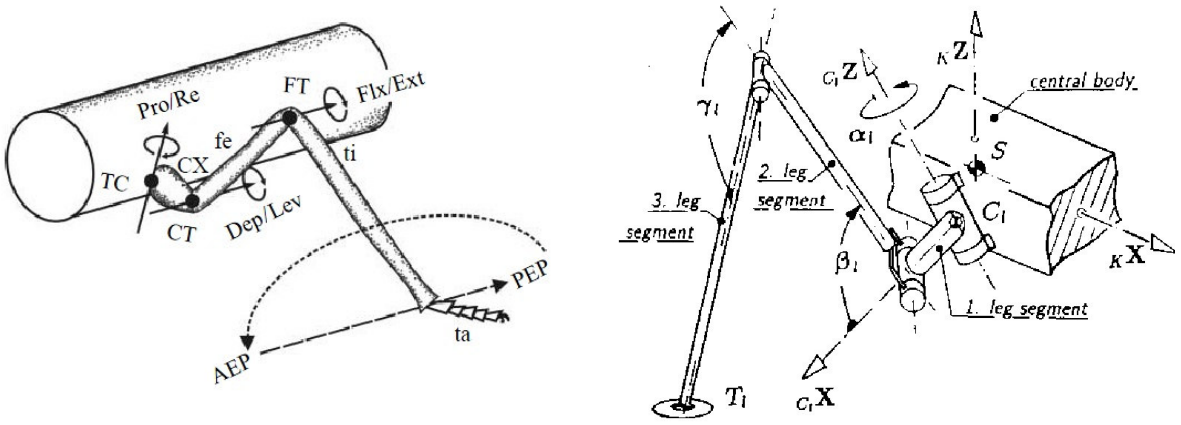
(a) (b)

Figura VI.1 - (a) TITAN-IV (HIROSE, 1991); (b) Esquema da perna do Dante (WETTERGREEN, 1992).

Diversos exemplos de acionamentos elétricos, pneumáticos e hidráulicos podem ser encontrados na literatura, como por exemplo: PV-II (HIROSE, 1980), TITAN-III (HIROSE, 1985), TITAN-IV (HIROSE, 1991), Dante I (WETTERGREEN, 1992), RIMHO (VARGAS, 1994), Boadicea (BINNARD, 1995) e Dante II (BARES, 1999). São desenvolvidos ainda hoje, (LIANG, 2011), mas com o advento dos robôs inspirados na biologia, a frequência com que são empregados diminuiu notavelmente.

VI.1.3. Configurações inspiradas na biologia

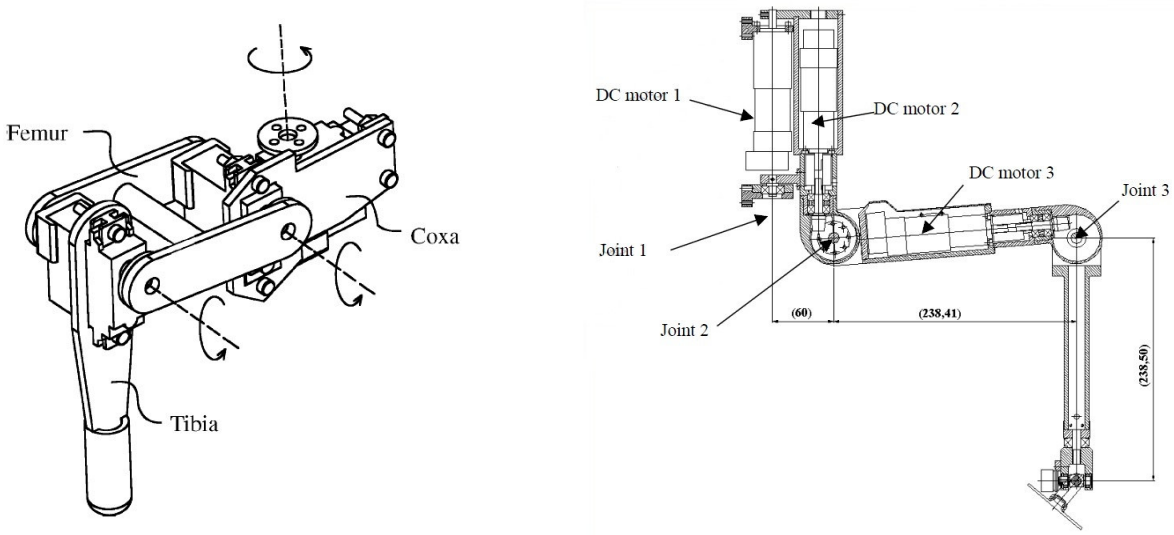
Os trabalhos desenvolvidos por Cruse na década de 70 inspiraram novas pesquisas na área da robótica móvel. Essa nova tendência pode ser vista na mudança dos conceitos de modelos apresentados desde então. Isso somado ao avanço das tecnologias, da computação científica e dos equipamentos, permitiu desenvolver protótipos de pernas mais parecidos com a realidade. O tipo mais comum é o de três graus de liberdade onde cada grau de liberdade corresponde a uma junta de rotação, como pode ser visto nos robôs TUM (WEIDERMANN, 1994), LAURON (CORDES, 1997), HAMLET (FIELDING, 2001) e Scorpion (KLAASSEN, 2001).



(a) (b)

Figura VI.2 - (a) Perna do inseto (CRUSE, 2007); (b) Modelagem (PFEIFFER, 1990).

Um dos problemas enfrentados por esse novo modelo é o peso da plataforma e das pernas. Com muitos motores, sensores e redutores em cada perna, o protótipo acaba ganhando peso e mais torque é necessário para a elevação da perna e sustentação do corpo. Uma das estratégias para tentar minimizar esse efeito é colocar os motores o mais perto possível do corpo do robô (Figura VI.2, (b)). A Figura VI.3 apresenta algumas configurações clássicas.



(a) (b)

Figura VI.3 - (a) Projeto com servomotores (GO, 2006); (b) Projeto com motores DC (CSIC, 2000).

VI.2. Proposta de projeto mecânico

Para que fosse cumprida a proposta inicial do trabalho que visava à construção do projeto mecânico, foram comprados motores DC, sensores e redutores do grupo Faulhaber (Anexo B). O comprimento do motor com o redutor e o sensor acoplados ultrapassa 137 milímetros, que é um comprimento razoavelmente grande, e devido a isso, o protótipo se baseará no conceito do robô SILO-4, Figura VI.3, (b), cujos motores encontram-se por dentro da estrutura da perna. Todos os desenhos desta seção foram desenvolvidos em Solidworks®.

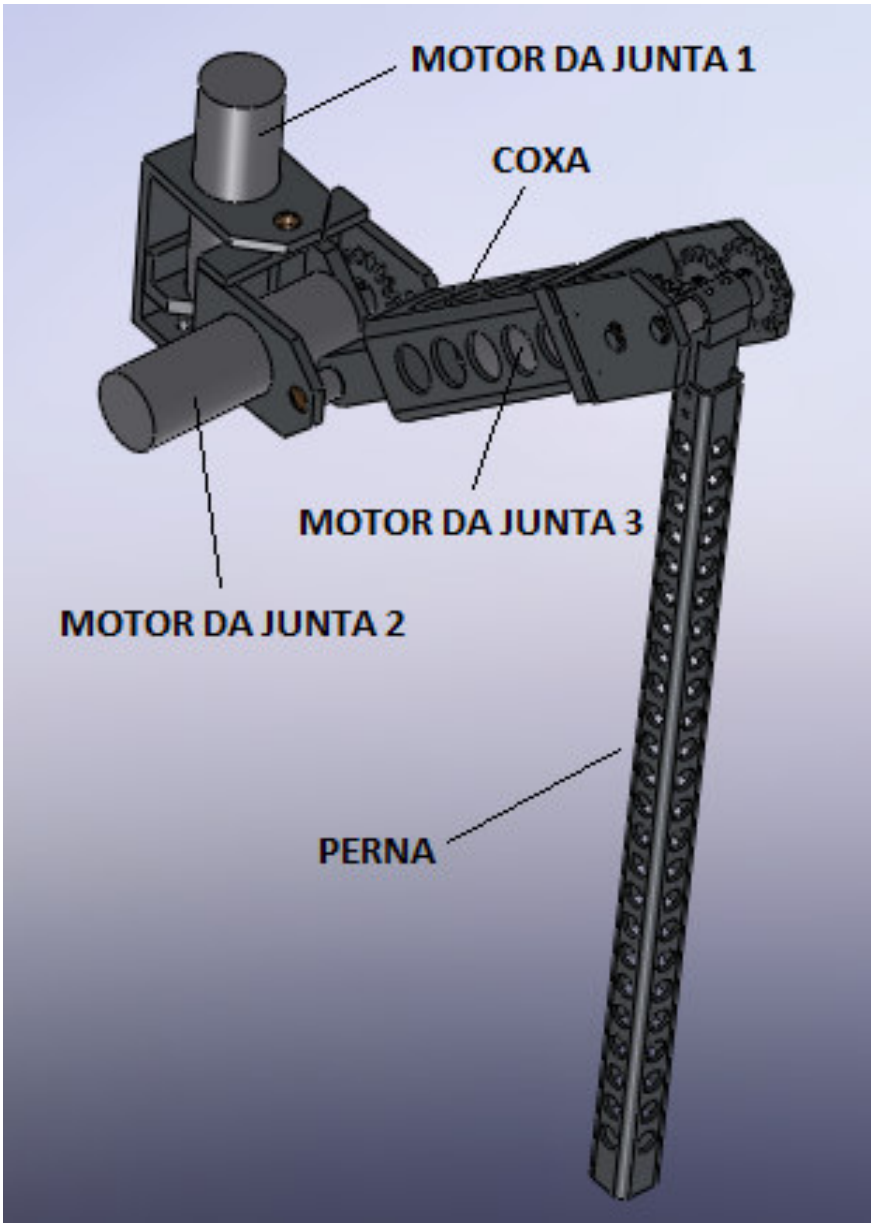


Figura VI.4 – Proposta de projeto mecânico para a perna do hexápode.

Tabela VI.1 - Dados do conjunto redutor, motor e sensor.

	Motor	Redutor	Sensor	Total
Comprimento [mm]	62,0	57,0	18,3	137,3
Massa [g]	242	260	48	550

Todas as transmissões de movimento entre os elos são feitas por engrenagens, projetadas e dimensionadas conforme PROVENZA (1991) e (1996). Porém, não foram feitos os cálculos de esforços para verificar se essas engrenagens resistem a forças e torques resultantes dos movimentos simulados.

Para efeito de simulação, serão necessários os dados relativos ao comprimento, massa, posição do centro de gravidade e matriz de inércia de cada um dos elos. Essas informações podem ser obtidas por uma análise do Solidworks®, desde que sejam especificados os tipos de materiais empregados na montagem. Com exceção das buchas, que foram especificadas como bronze comercial, os outros elementos foram definidos como aço inoxidável AISI 304 ou 1020.

VI.2.1. Junta 1

A junta 1 fica fixa ao corpo do robô e contém o motor 1 que transmite movimento de rotação ao elo 1.

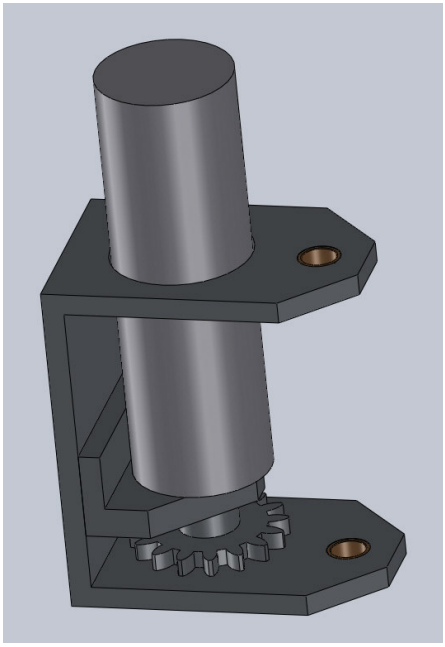


Figura VI.5 – Junta 1.

Note que para a direção de rotação da junta 1 ser coerente com a Figura III.5, o motor 1 foi posicionado na vertical.

VI.2.2. Elo 1

O elo 1 só possui movimento de rotação e contém o motor 2 que transmite movimento de rotação ao elo 2 (coxa).

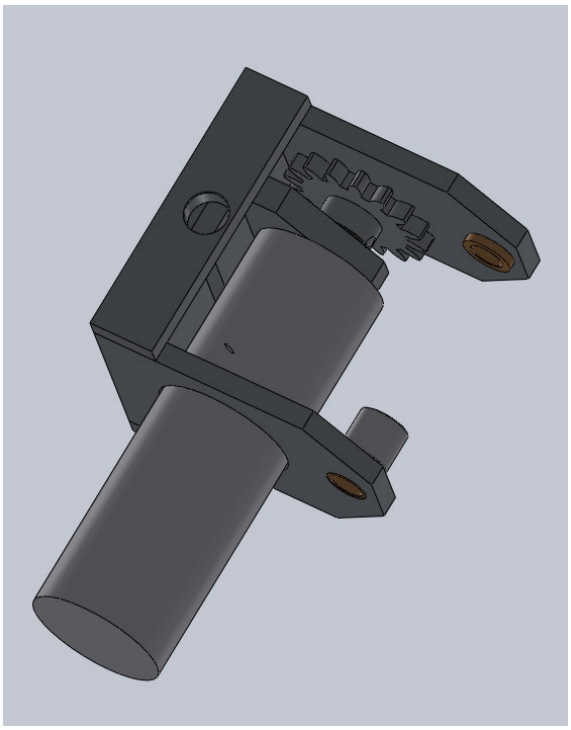
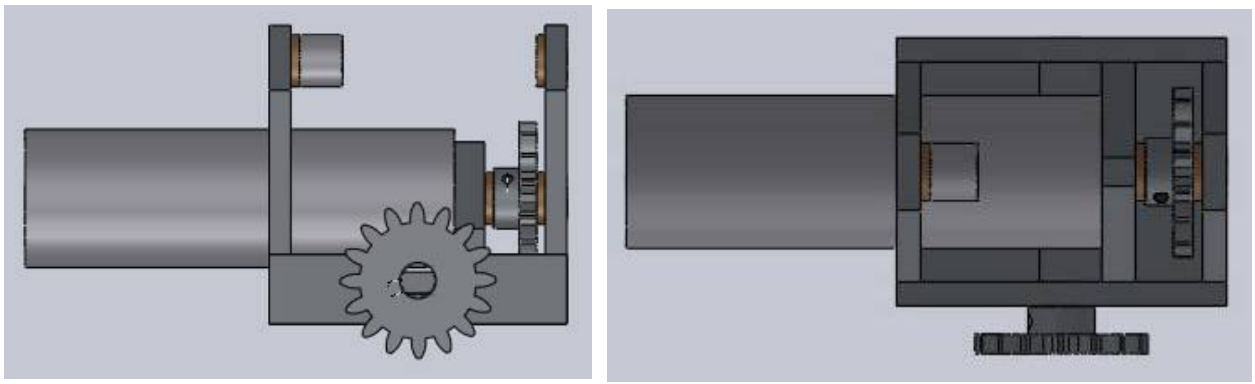


Figura VI.6 – Vista isométrica do elo 1.



(a) (b)

Figura VI.7 – Vistas do elo 1. (a) Vista inferior; (b) Vista frontal.

Os dados do elo 1 usados na simulação serão, portanto:

Tabela VI.2 - Dados do elo 1.

	Comprimento [mm]	Massa [g]	Centro de Gravidade [mm]
Elo 1	50,81	881,79	$(16{,}45;\ -1{,}00;\ 27{,}58)^{T}$

A matriz de inércia, com relação ao centro de gravidade, em *g.mm*^{2}, vale:

$$ {}^{G_1}\mathrm{I}^{G_1} = \begin{bmatrix} 1.149.774{,}58 & 16.063{,}94 & 69.029{,}20 \\ 16.063{,}94 & 1.166.935{,}85 & 27.205{,}73 \\ 69.029{,}20 & 27.205{,}73 & 256.148{,}08 \end{bmatrix} $$

Como os motores são muito compridos, o elo 1 ficou assimétrico. Essa assimetria pode ser vista no posicionamento dos eixos y e z do centro de gravidade do conjunto (Tabela VI.2), mas não terão muita influência na simulação, pois conforme ${}^{G_1}\mathrm{I}^{G_1}$, os produtos de inércia envolvidos são relativamente pequenos.

VI.2.3. Elo 2

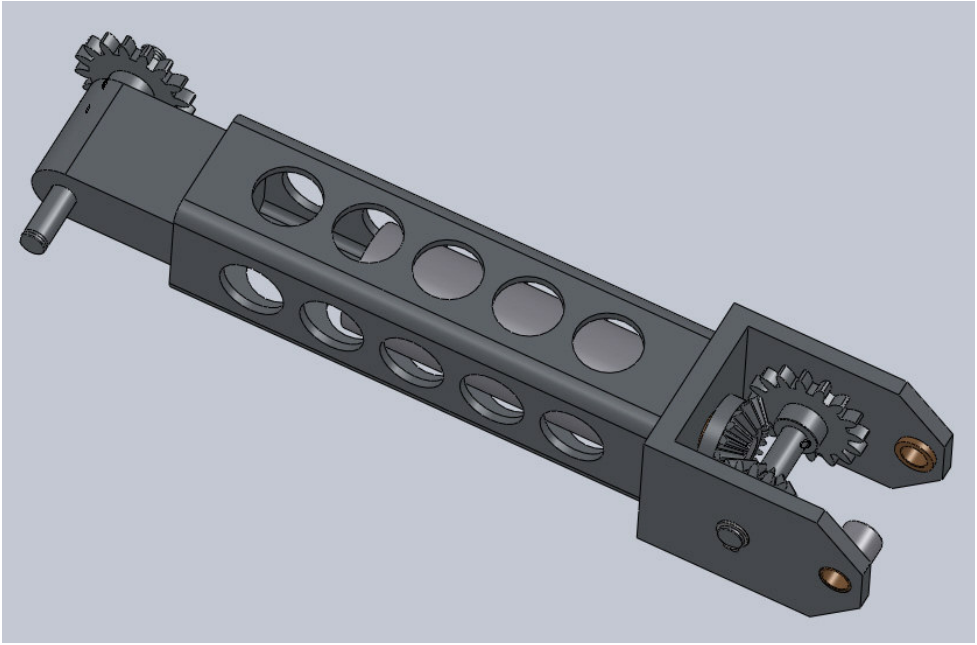


Figura VI.8 – Vista isométrica do elo 2

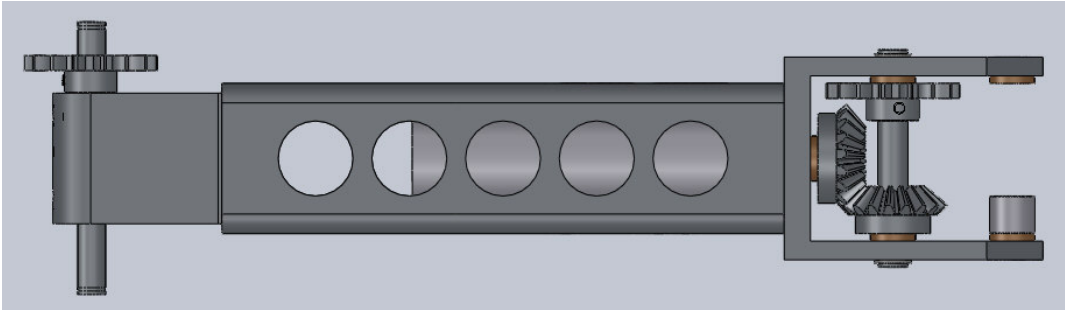


Figura VI.9 – Vista superior do elo 2.

O elo 2 (coxa), que possui movimento de rotação e translação, tem um conceito diferente do elo 1. Devido ao comprimento do motor, o mesmo foi posicionado no interior do mecanismo ao longo de sua extensão. Para haver concordância com a orientação angular definida na Figura III.5, fez-se necessário o uso de engrenagens cônicas de 90º, como pode ser visto Figura VI.9. Por ser mais comprido e possuir mais componentes, é o elo mais pesado, mas também é o mais simétrico.

Tabela VI.3 - Dados do elo 2.

	Comprimento [mm]	**Massa [g]**	**Centro de Gravidade [mm]**
Elo 2	245,80	1182,02	$(133{,}02;\ 0{,}01;\ -0{,}58)^T$

A matriz de inércia, com relação ao centro de gravidade, em *g.mm*^{2}, vale:

$$ {}^{G_2}\mathrm{I}^{G_2} = \begin{bmatrix} 303.373,62 & 619,62 & 93.431,89 \\ 619,62 & 4.936.905,78 & 13,74 \\ 93.431,89 & 13,74 & 4.847.775,88 \end{bmatrix} $$

VI.2.4. Elo 3

O elo 3 (perna) é o mais leve de todos, pois não tem motor; possui apenas a estrutura metálica. O seu comprimento não é definitivo e só será ajustado quando a estrutura do corpo do robô for definida. Também não se projetou um formato para o pé, pois as simulações visam apenas o movimento em cadeia aberta, sem contato com o solo.

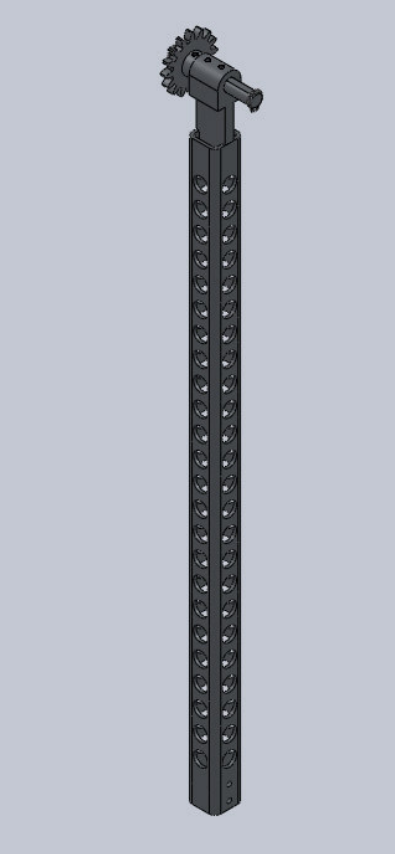


Figura VI.10 - Elo 3.

Tabela VI.4 - Dados do elo 3.

	Comprimento [mm]	**Massa [g]**	**Centro de Gravidade [mm]**
Elo 3	435,00	178,37	$(138{,}95;\ 0{,}00;\ -2{,}67)^T$

A matriz de inércia, com relação ao centro de gravidade, em *g.mm*^{2}, vale:

$$ {}^{G_3}\mathbf{I}^{G_3} = \begin{bmatrix} 27.621,48 & -12,30 & 66.232,77 \\ -12,30 & 3.819.725,75 & -0.59 \\ 66.232,77 & -0,59 & 3.807.660,91 \end{bmatrix} $$

Capítulo VII - Resultados e Discussões

VII.1. Análise dinâmica

Um dos problemas que se colocam na robótica de locomoção por pernas é a forma geométrica que devem ter as trajetórias dos pés. Vários modelos foram desenvolvidos nos últimos anos, sendo as trajetórias mais comuns baseadas em funções matemáticas e no estudo de movimento de insetos. Os padrões de locomoção não serão discutidos neste texto, uma vez que a proposta do trabalho se limita ao estudo da cadeia cinemática aberta do manipulador.

Para o efeito da animação, foram utilizados recursos simples de desenho, conforme a Figura VII.1. Os elos da perna são as retas em azul. As circunferências, em preto, representam as juntas de rotação. O ponto em vermelho é o pé do robô e segue a trajetória desejada.

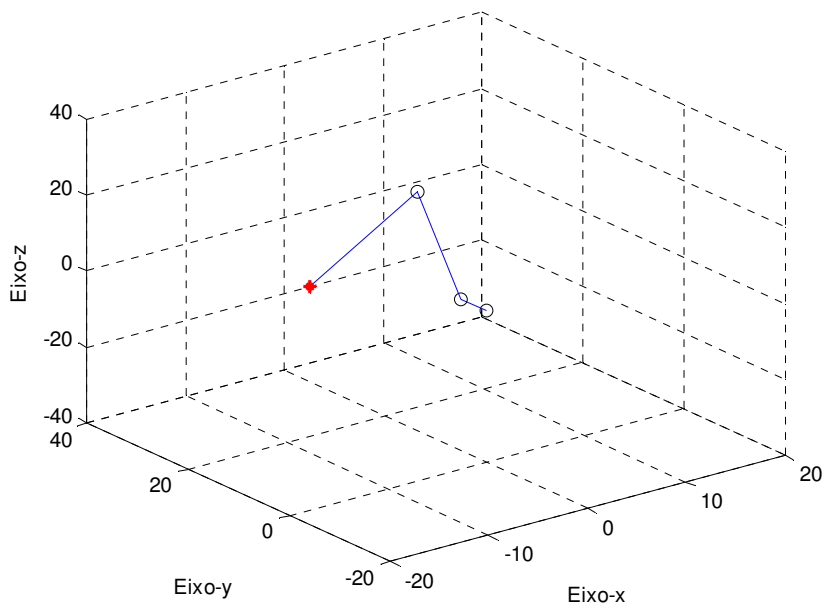


Figura VII.1 - Representação esquemática da perna no MATLAB®.

VII.1.1. Trajetórias baseadas em funções matemáticas

A estratégia mais difundida talvez seja a de adotar funções matemáticas para tentar reproduzir as trajetórias no espaço cartesiano. As funções mais comuns são as elipses, as trigonométricas e os polinômios. A combinação entre curvas é uma alternativa e pode ser desenvolvida dependendo da aplicação e do tipo de terreno.

Para implementar uma trajetória de referência é preciso que a curva modelada seja suave, isto é, posição, velocidade e aceleração precisam ser contínuas e admitirem derivadas

contínuas, caso contrário o controle pode ser comprometido. Todas as curvas simuladas estão na forma paramétrica ou polinomial e a teoria de curvas suaves, bem como alguns dos exemplos utilizados, encontra-se em DO CARMO (1976) e SANTOS (2003).

As simulações foram realizadas no MATLAB®. Todas as distâncias estão em centímetros e os ângulos são expressos em graus. As trajetórias foram discretizadas em 50 pontos.

Exemplo VII.1: Trajetória vertical

Foram definidas duas equações paramétricas que simulam a elevação do pé segundo uma trajetória vertical.

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 35 \\ z(t) = 30t - 15 \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 35 \\ z(t) = 30t^2 - 15 \end{cases}$$

Como o tempo de simulação foi de 1 segundo para $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, os pontos inicial e final de cada trajetória são coincidentes, de forma que as curvas simuladas são idênticas.

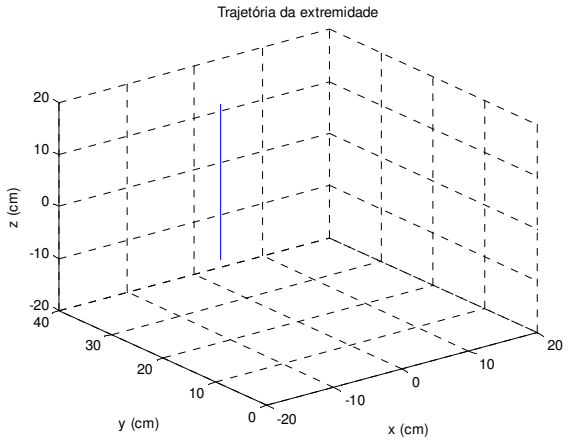
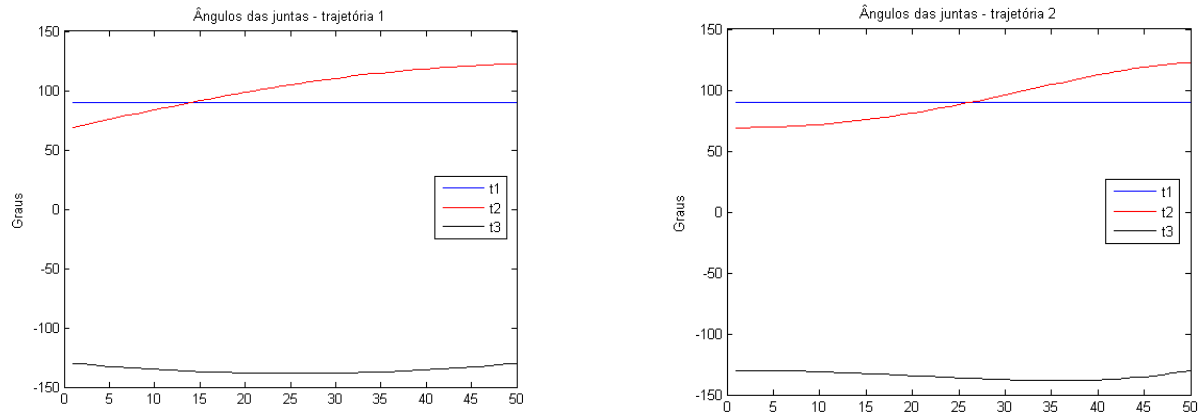


Figura VII.2 - Curvas simuladas para as trajetórias verticais.

Embora as curvas sejam idênticas, a variação angular das respectivas juntas é diferente, pois as velocidades lineares dos movimentos não são iguais. Essa afirmação pode ser verificada através da análise da cinemática inversa desenvolvida no Capítulo III.

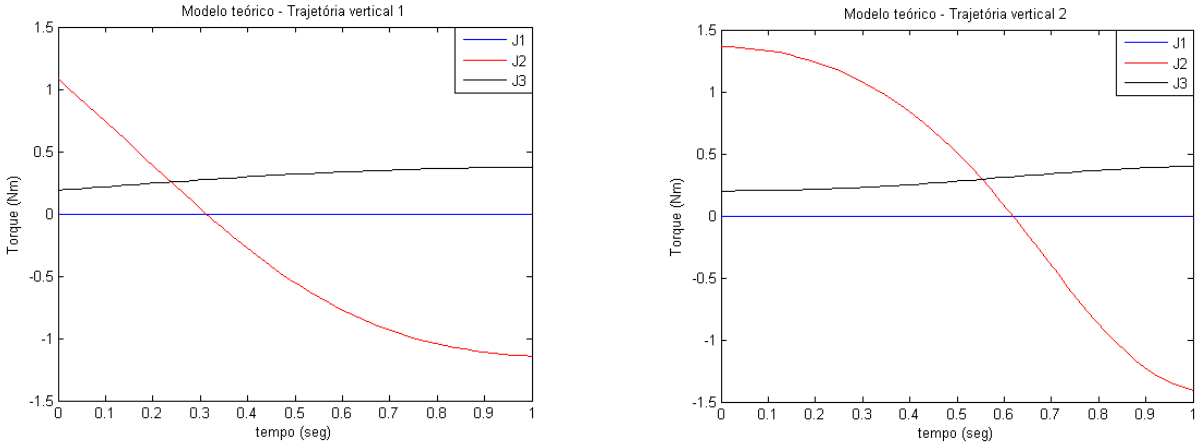


(a) (b)

Figura VII.3 - Ângulos das juntas. (a) Trajetória vertical 1; (b) Trajetória vertical 2.

Observa-se que as variações são coerentes, pois como o movimento é vertical, não há acionamento da junta 1, ou seja, o ângulo t_1 é constante. A junta 2, por outro lado, é constantemente acionada para levantar o pé do robô, de forma que t_2 sempre aumenta. Por fim, como a trajetória é simétrica em relação ao eixo z do manipulador, o terceiro ângulo é igual no início e no final da trajetória.

A simulação dinâmica para o modelo teórico apresentado no Capítulo IV fornece os seguintes resultados:

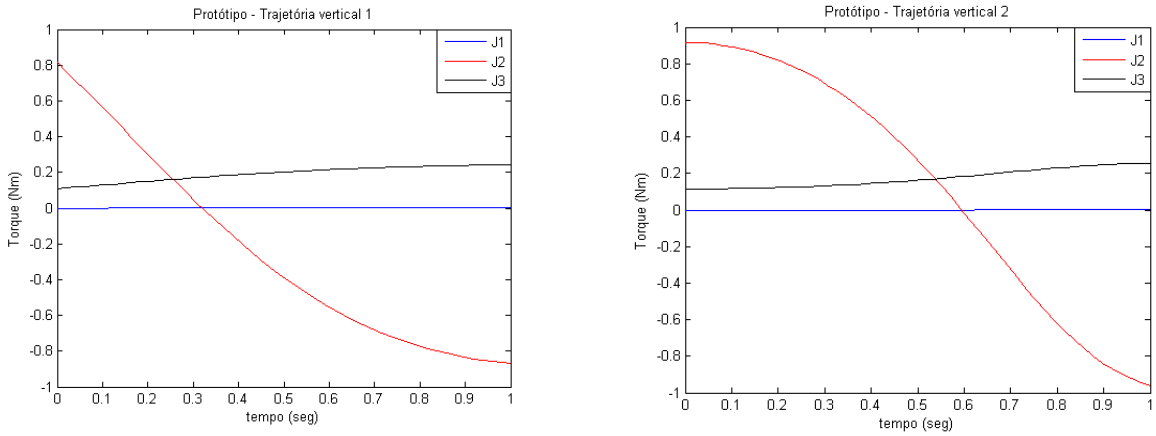


(a) (b)

Figura VII.4 - Torques no modelo teórico para as trajetórias verticais.

Como era de se esperar o torque na junta 1 é nulo. A junta 2 inicialmente apresenta torque maior, pois sofre ação do motor 3 e dos elos 2 e 3, mas vai diminuindo, visto que à medida em que o ângulo t_2 aumenta, os centros de massa dos elos e do motor 3 ficam mais próximos do referencial inercial. Com o ângulo maior do que 90 graus, o torque exercido pelo elo 2 inverte o sentido, e como ele é mais pesado que o elo 3, o torque na junta 2 passa a ser negativo. A queda mais acentuada do torque na curva 1 pode ser explicada devido ao fato do ângulo 2 na primeira trajetória alcançar os 90 graus mais rapidamente, como pode ser observado na Figura VII.3.

A simulação para o protótipo apresentado no Capítulo VI necessita de pequenas alterações no algoritmo, pois não se deve mais considerar os elos como barras delgadas, nem admitir que os centros de massa estejam localizados no meio deles. Assim, a análise dinâmica resultou nas seguintes curvas.



(a) (b)

Figura VII.5 - Torques no protótipo para as trajetórias verticais.

Primeiramente, deve ser notado que não houve alteração característica no comportamento das curvas. Conforme discutido no Capítulo VI, a assimetria apresentada pelo protótipo além de provocar uma leve alteração no torque da junta 1, produziu produtos de inércia relativamente pequenos, garantindo curvas muito próximas. Essa afirmação pode ser comprovada pela análise isolada dos componentes da Eq. IV.17. Percebe-se que as contribuições do torque relativas às matrizes de inércia e de Coriolis são muito pequenas se comparadas à contribuição do torque produzido pelo vetor gravitacional.

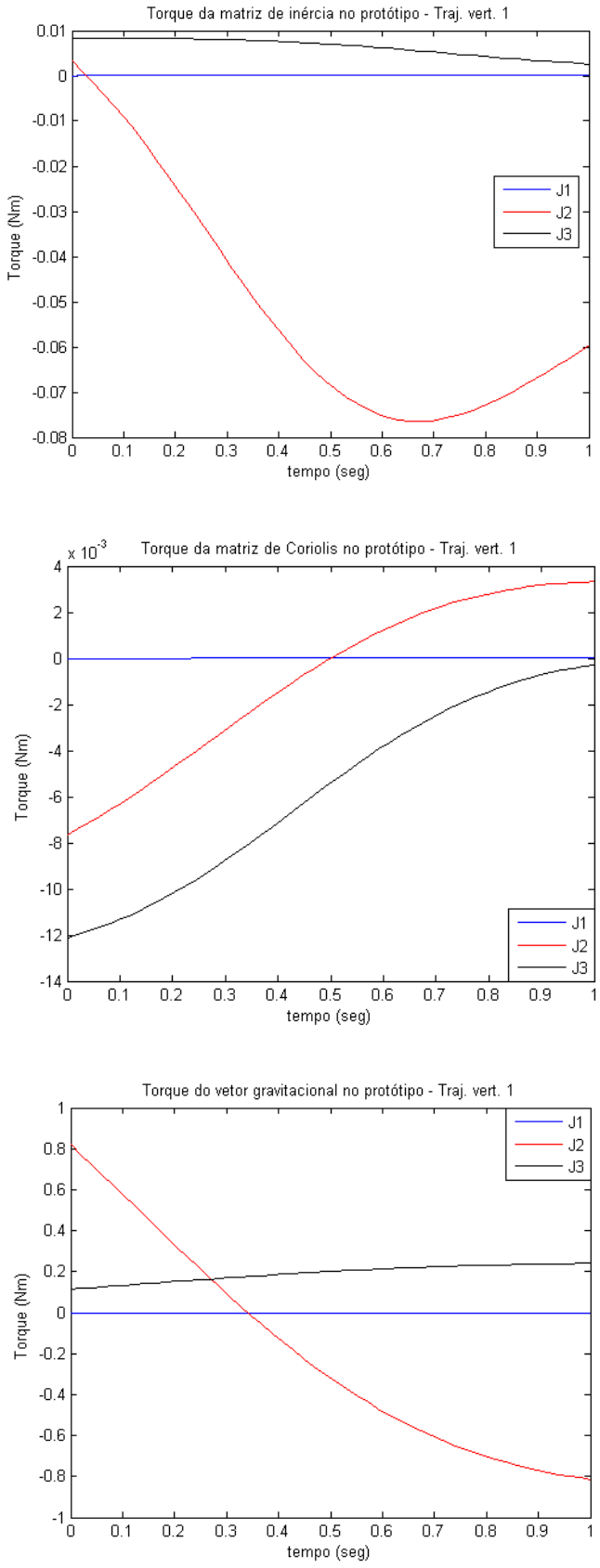


Figura VII.6 - Contribuições do torque relativas às matrizes de inércia e Coriolis e vetor gravitacional.

Finalmente, deve ser observado que os torques exigidos no protótipo são ligeiramente menores do que no modelo teórico. Isso se explica porque no modelo teórico os pesos do elo e do motor atuam a 122,9 e 245,8 mm do referencial fixo na junta 2, enquanto no protótipo, como o motor está embutido no elo, o peso do conjunto (elo e motor) atua a 133 mm do mesmo referencial (Figura VII.7).

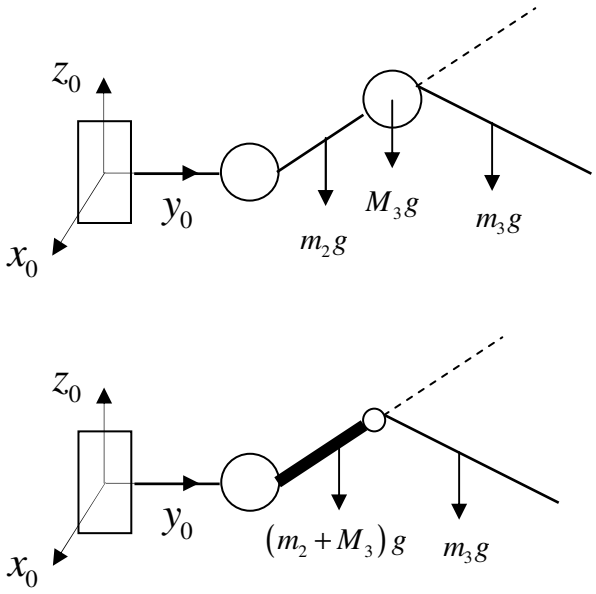


Figura VII.7 - Torques no modelo teórico (acima) e no protótipo (embaixo).

Exemplo VII.2. Trajetória curva

A curva descrita agora é uma trajetória elíptica, que simula o passo de uma perna. Esta trajetória foi modelada de modo que a extremidade da perna fique sempre em um plano paralelo ao corpo do robô. O tempo de simulação foi de 2 segundos.

$$\begin{cases} x(t) = -15\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \\ y(t) = 40 \\ z(t) = 15\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) - 20 \end{cases}$$

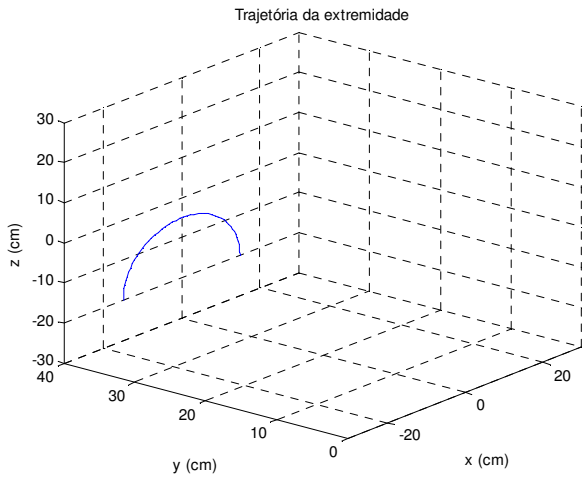


Figura VII.8 - Equação paramétrica da elipse e sua curva simulada.

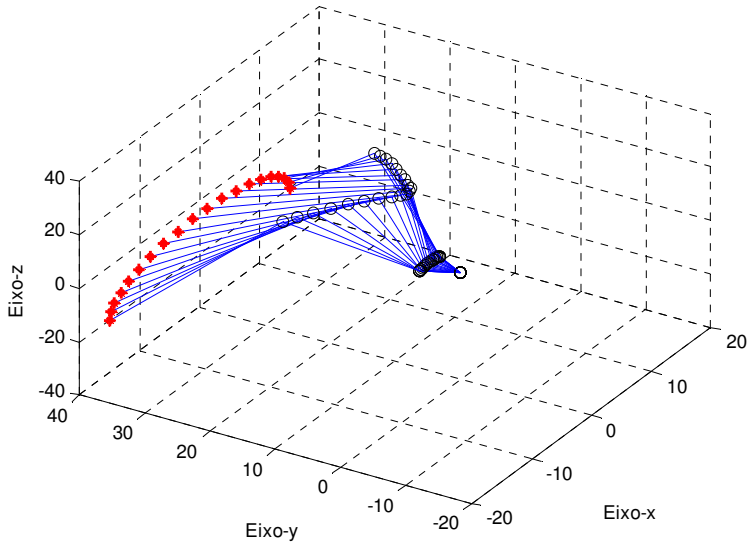


Figura VII.9 - Vista isométrica do movimento circular.

Este exemplo difere do anterior, pois nesta trajetória o ângulo 1 varia. Como o início do movimento se dá na parte negativa do eixo x, era de se esperar que t_1 diminuísse. Por outro lado, dada a simetria da curva, os ângulos 2 e 3 deveriam ser simétricos ao centro da trajetória, sendo que t_2 deveria ter ponto de máximo e t_3, de mínimo, o que de fato, ocorre.

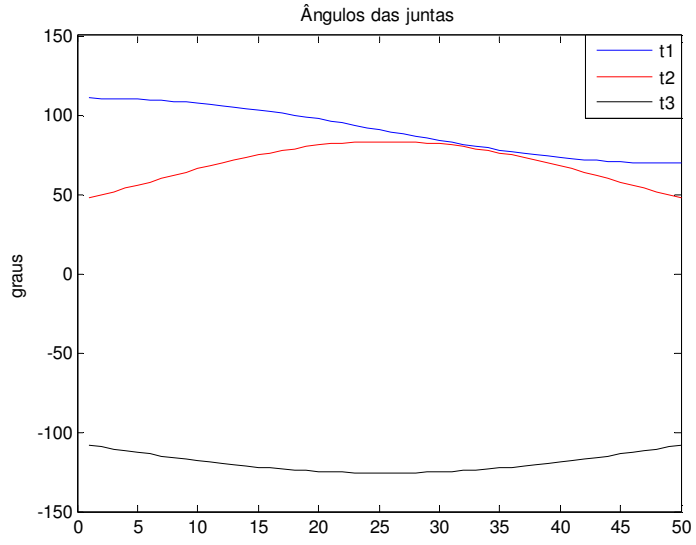


Figura VII.10 - Variação angular do movimento circular.

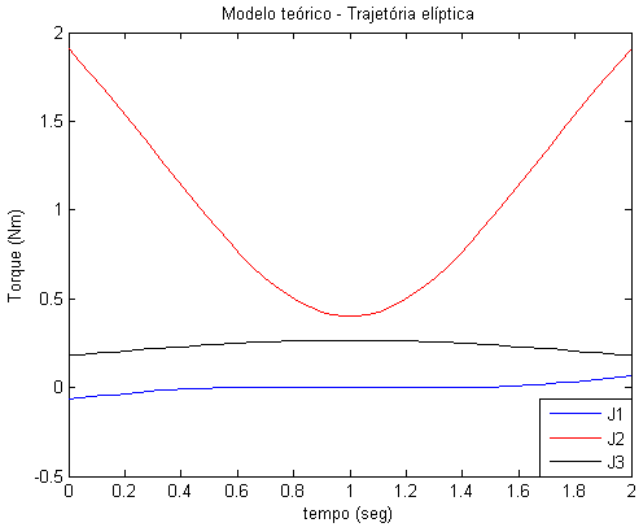


Figura VII.11 - Torques no modelo teórico para a trajetória elíptica.

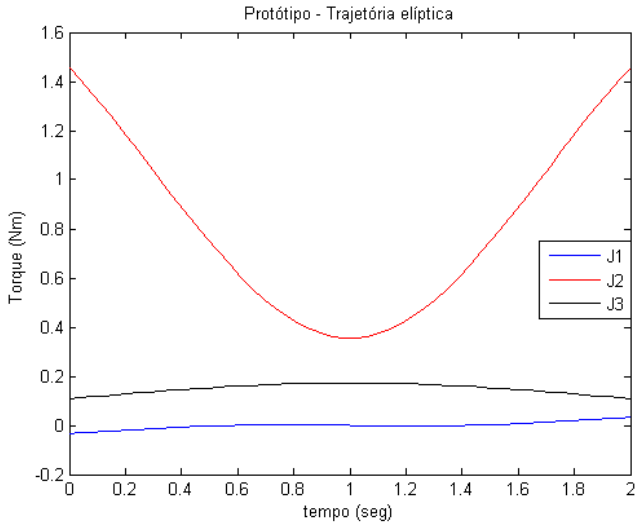
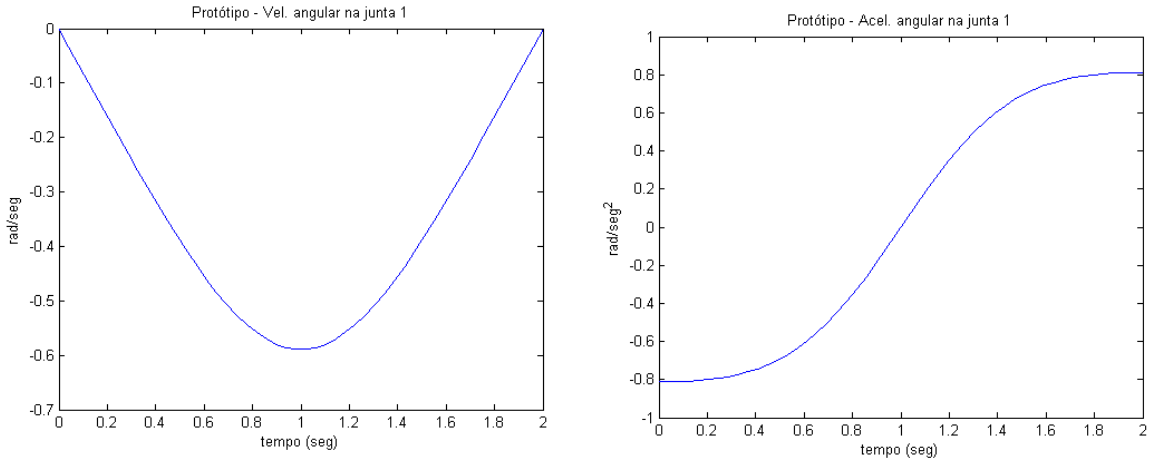


Figura VII.12 - Torques no protótipo para a trajetória elíptica.

Verifica-se que as curvas de torque para a trajetória elíptica nas juntas 2 e 3 são simétricas, devido a simetria do movimento em relação ao eixo x. Novamente o torque 2 deveria ser mínimo no meio da trajetória, pois elos e motores estão mais próximos do corpo do robô. O torque na junta 1, no entanto, não atende a esse padrão. De acordo com a Figura III.3, quando a junta 1 gira no sentido horário, a sua velocidade angular é negativa. Como o movimento se dá da esquerda para a direita, o motor 1 vai ter que girar no sentido horário. Por outro lado, para vencer a inércia do mecanismo, a velocidade tem que aumentar em módulo, de forma que uma aceleração negativa deve ser impressa ao sistema.



(a) (b)

Figura VII.13 - Junta 1 do protótipo. (a) Velocidade angular; (b) Aceleração angular.

Como o vetor gravitacional não atua nesta junta, o torque depende somente das matrizes de inércia e Coriolis e das acelerações e velocidades angulares. Portanto, o torque inicial e o final são iguais em módulo, pois a mesma energia necessária para dar movimento ao sistema deve ser usada para impedi-lo de se movimentar.

Exemplo VII.3. Trajetória fechada

Embora esta seja mais uma curva plana, ela difere dos dois exemplos anteriores por se tratar de uma curva fechada. A Lemniscata foi escolhida por ser uma curva fechada com interseção. O tempo de simulação foi de 3 segundos.

$$\begin{cases} x(t) = -20\cos\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) \\ y(t) = 5\sin\left(\dfrac{4\pi t}{3}\right) + 40 \\ z(t) = -5 \end{cases}$$

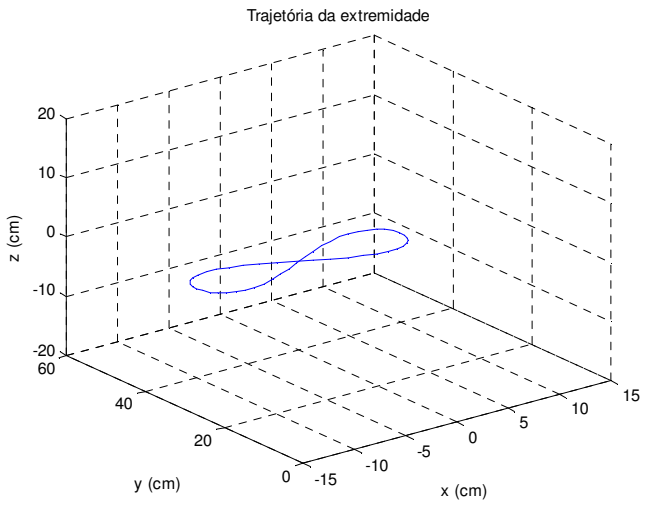


Figura VII.14 - Equação paramétrica da lemniscata e sua curva simulada.

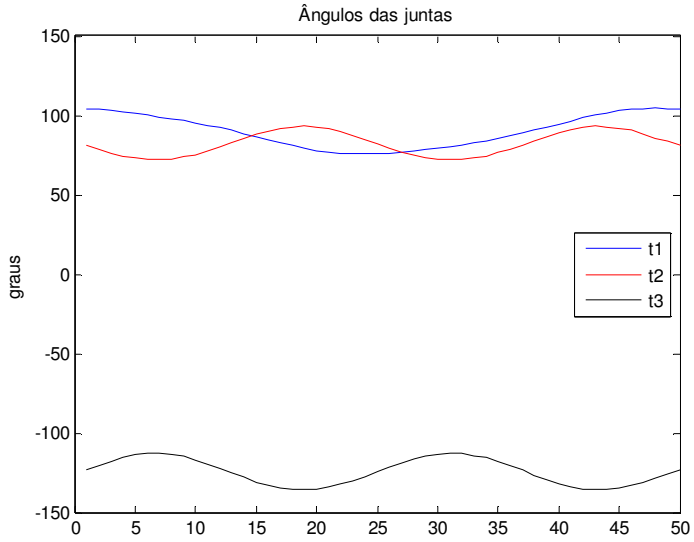
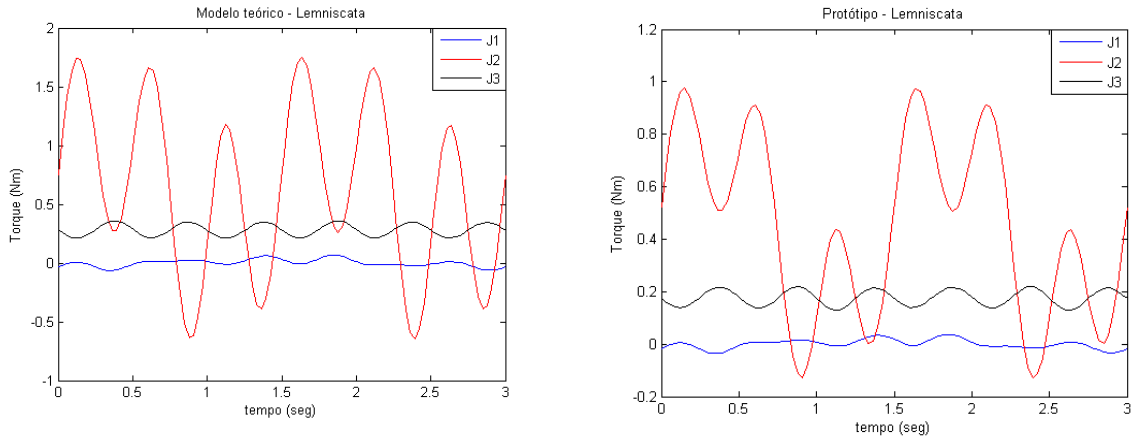


Figura VII.15 - Variação angular da curva lemniscata.

Apesar de a lemniscata ser uma curva mais complexa do que a circunferência, o comportamento dos ângulos é semelhante. Os ângulos t_2 e t_3 são espelhados e t_1 é simétrico no tempo.



(a) (b)

Figura VII.16 - Torques na lemniscata. (a) Modelo teórico; (b) Protótipo.

Verifica-se um padrão entre este exemplo e o anterior. Novamente a junta 2 é a mais acionada e os torques no protótipo são menores, sendo que, quando o torque 2 é máximo, o torque 3 é mínimo, e vice versa.

Exemplo VII.4. Trajetória helicoidal

Os três exemplos anteriores caracterizaram-se por apresentarem curvas planas. Como último exemplo de simulação dinâmica, é apresentada uma trajetória helicoidal. O tempo de simulação foi de 20 segundos.

$$\begin{cases} x(t) = 9e^{-0.02t}\sin(0,6t) \\ y(t) = 9e^{-0.02t}\cos(0,6t) + 50 \\ z(t) = \dfrac{t}{2} - 4 \end{cases}$$

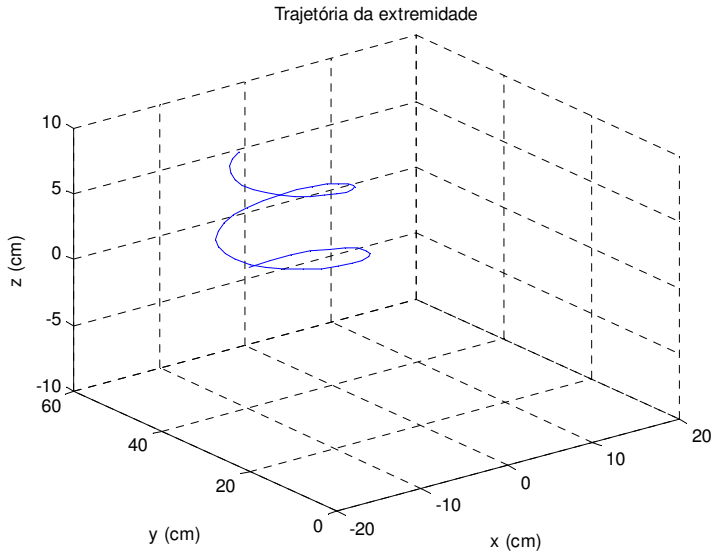


Figura VII.17 - Equações paramétricas da espiral e sua curva simulada.

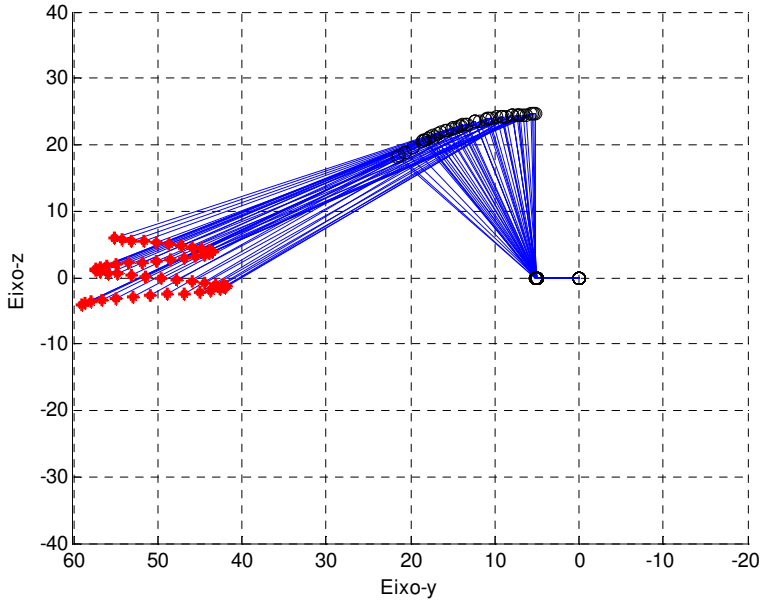


Figura VII.18 - Vista do plano yz do movimento.

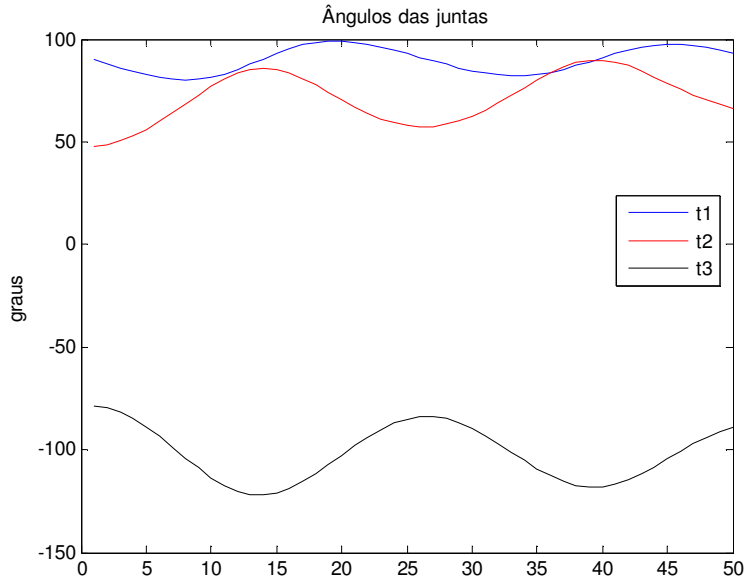
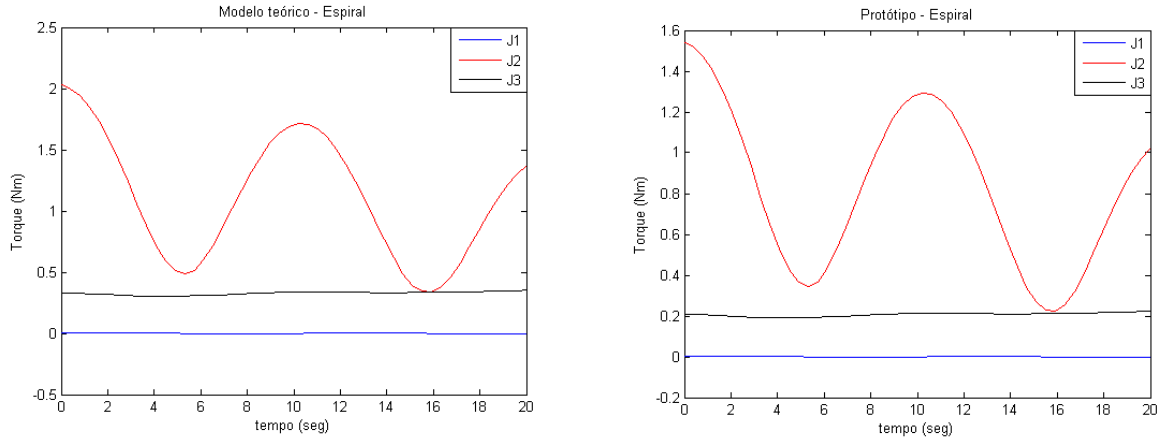


Figura VII.19 - Variação angular da trajetória helicoidal.



(a) (b)

Figura VII.20 - Torques na trajetória helicoidal. (a) Modelo teórico; (b) Protótipo.

As curvas simuladas nos exemplos VII.2 a VII.4 apresentam o mesmo padrão de deslocamento dos elos 2 e 3, o que justifica a variação angular de t_2 e t_3 nas figuras VII.19, VII.15 e VII.10. A única diferença no torque da junta 2 é que sua curva não é mais simétrica e, necessita de um acionamento mais alto.

VII.1.2. Trajetórias inspiradas na biologia

Devido ao fato da locomoção por pernas permitir acesso a lugares que não podem ser alcançados por veículos com rodas, o interesse e a quantidade de estudos vêm aumentando significativamente. Recentemente as pesquisas vêm se inspirando na natureza, mais precisamente em insetos, para incorporar conceitos biológicos e biomecânicos no controle de robôs com pernas, inclusive nos bípedes, como pode ser visto em KOYACHI (2002), ESPENSCHIED (1996) e WEIDERMANN (1994).

Quando o projeto de um robô é baseado nas características de um animal ou inseto, uma das técnicas para modelar a trajetória de seus corpos é utilizar recursos especiais de filmagem (BAI, 2000). Modelos e técnicas complexas de locomoção são propostos em diversos artigos, mas esta não é a proposta deste trabalho.

A trajetória desenvolvida abaixo, retirada de KOYACHI (2002), apresenta um modelo simples, mas bastante representativo do movimento de um louva-deus. É baseada em equações polinomiais de quinta ordem e necessitou de pequenas adaptações nos seus coeficientes para que pudesse ser aplicada no mecanismo desenvolvido para este trabalho. Os detalhes específicos da elaboração desses polinômios podem ser vistos em KECSKÉS (2009) e WOERING (2011).

$$\begin{cases} x(t) = 20\left[512(w-2)T^5 - 32(2w-3)T^3 + 2wT\right] \\ y(t) = 40 \\ z(t) = 10\left[256T^4 - 32T^2 + 1\right] \end{cases}$$

onde $T = -0,25 + 0,5t$.

O valor de w não é especificado no artigo, mas para que pudesse haver sincronia entre as coordenadas x e z, o valor adotado foi de $w = 2,2$. Cabe ressaltar que essas equações estão inseridas dentro de um ciclo de locomoção do robô, que inclui o movimento do corpo, mas a simulação se limitará apenas ao movimento da perna.

O comportamento das curvas x e z, é ilustrado na Figura VII.21.

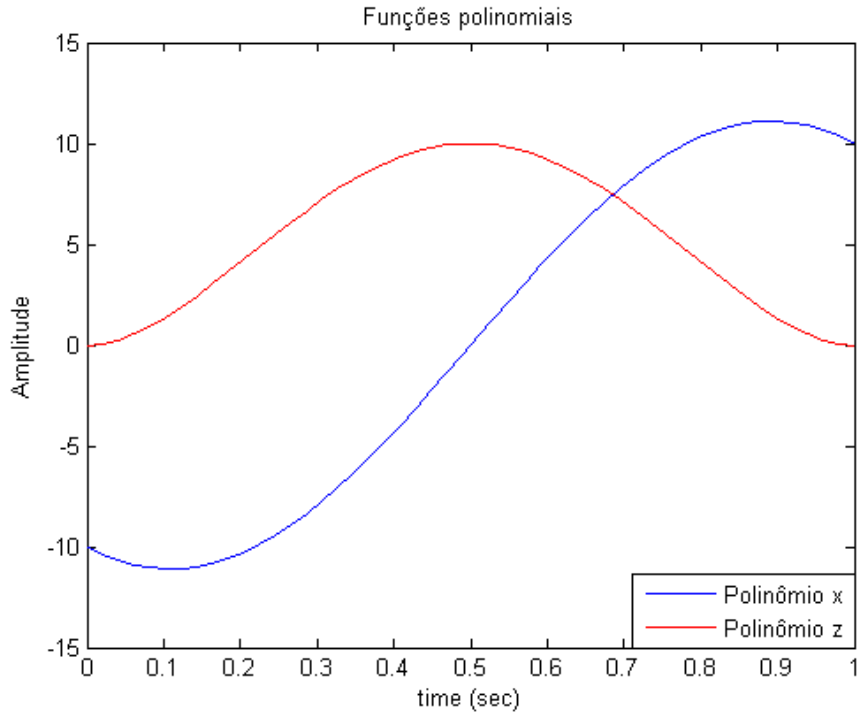


Figura VII.21 - Comportamento das funções *x* e *z*.

A composição paramétrica resulta na seguinte trajetória.

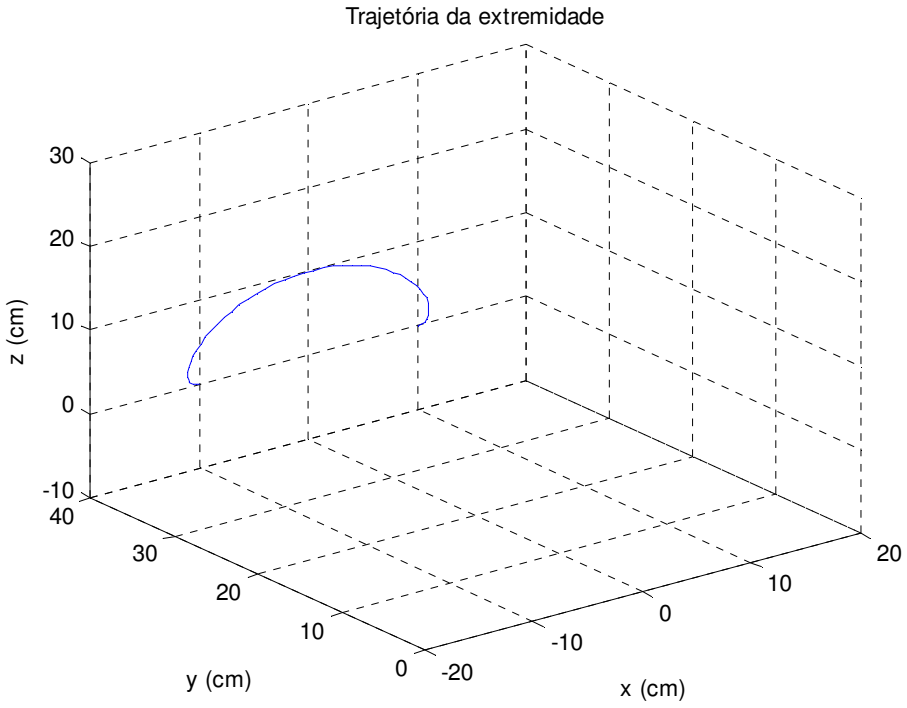


Figura VII.22 - Trajetória representativa da perna de um louva-deus.

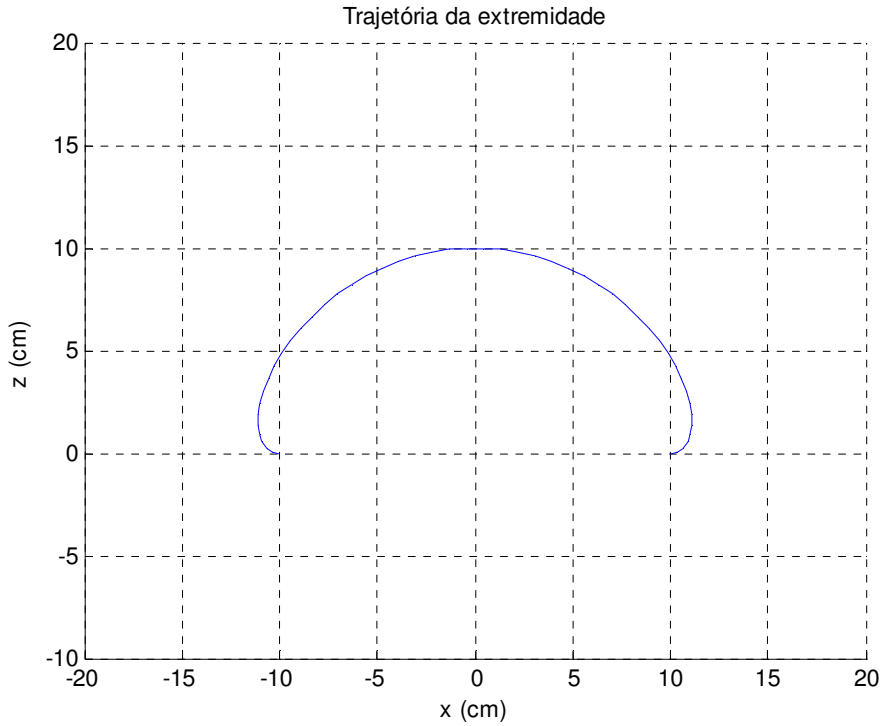


Figura VII.23 - Vista no plano xz.

Os respectivos ângulos das juntas são apresentados na Figura VII.24.

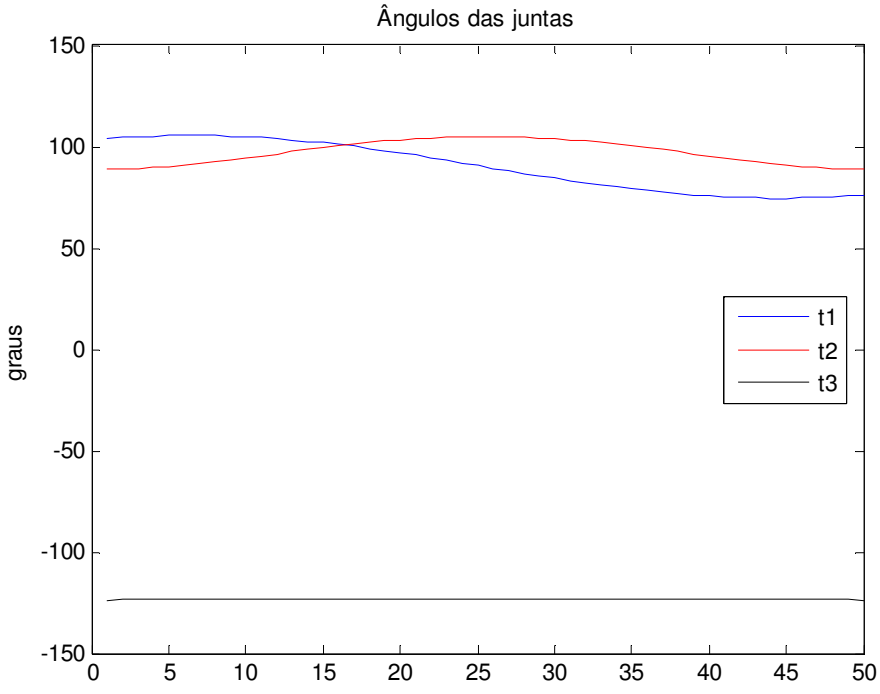


Figura VII.24 - Variação angular das juntas.

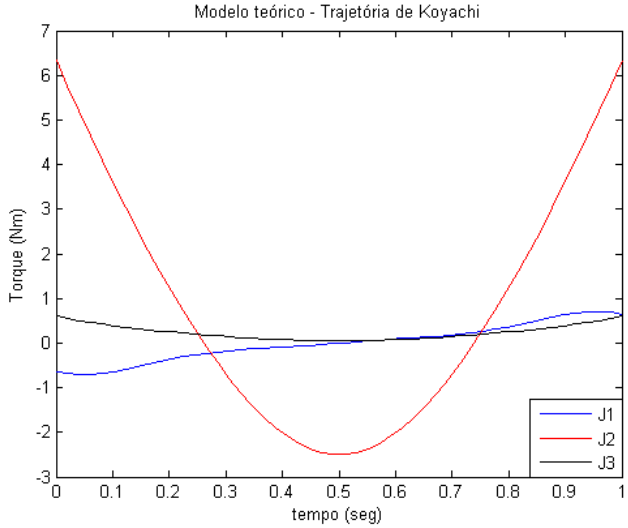


Figura VII.25 - Torques na trajetória de Koyachi para o modelo teórico.

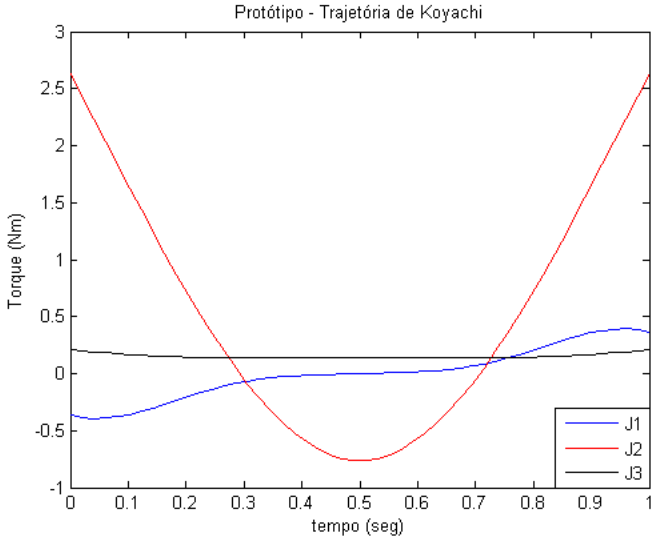


Figura VII.26 - Torques na trajetória de Koyachi para o protótipo.

Como essa trajetória é uma adaptação mais realística do movimento de locomoção, era de se esperar que os resultados fossem ligeiramente diferentes, como pode ser constatado nas figuras VII.24 e VII.25. O que chama a atenção é o torque mais alto para o acionamento da junta 2, se comparados com os resultados anteriores. Isso pode ser justificado pelos coeficientes muito elevados dos polinômios. Embora a amplitude em z seja de 10 centímetros, que é compatível com as curvas anteriores, os coeficientes altos exercerão influência na inércia, elevando o torque.

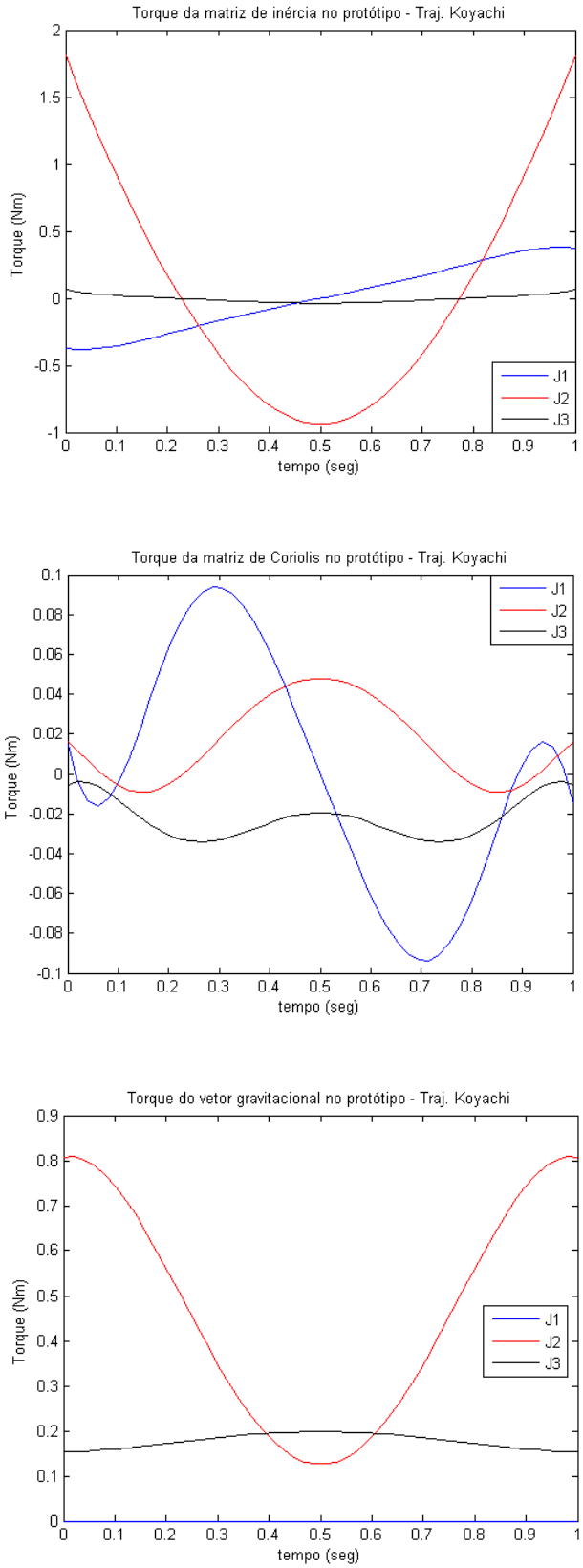


Figura VII.27 - Contribuições do torque relativas às matrizes de inércia e Coriolis e vetor gravitacional

VII.2. Análise de controle

O mecanismo será equipado com motores Faulhaber, série 3257-024CR, sensor angular HEDS 5500 e redutor, série 32/3, com redução de 1:246 acoplados. As constantes que serão utilizadas na simulação serão apresentadas na Tabela VII.1, mas os respectivos catálogos, com todas as especificações encontram-se no Anexo B.

As constantes mais comuns são:

- K_a : Constante de corrente [N.m/A]
- K_b : Constante da força contra-eletromotriz [V.s/rad]
- R_a : Resistência da armadura [ohm]
- n : Coeficiente de redução
- J_m : Inércia do rotor do motor [Kg.m^2]
- f_m : Coeficiente de atrito viscoso [N.m.s/rad]
- L_a : Indutância da armadura [Henry]

Nem todos os valores de constantes estão com dimensões compatíveis nos catálogos, e, por isso, houve a necessidade de convertê-los.

Tabela VII.1 - Parâmetros dinâmicos.

Parâmetro	Valor	Unidade
K_a	0,037	N.m/A
K_b	0,0377	V.s/rad
R_a	1,63	ohm
n	1/246	-
J_m	$41 \cdot 10^{-7}$	Kg.m^2
f_m	$8,761 \cdot 10^{-4}$	N.m.s/rad
L_a	$2,7 \cdot 10^{-4}$	Henry

Exemplo VII.5. Análise das respostas ao degrau e à rampa da Equação V.7

$$\frac{\Theta_L}{V_a} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{\left(1,1 \cdot 10^{-9}\right) s^3 + \left(6,7 \cdot 10^{-6}\right) s^2 + \left(0,0028\right) s}$$

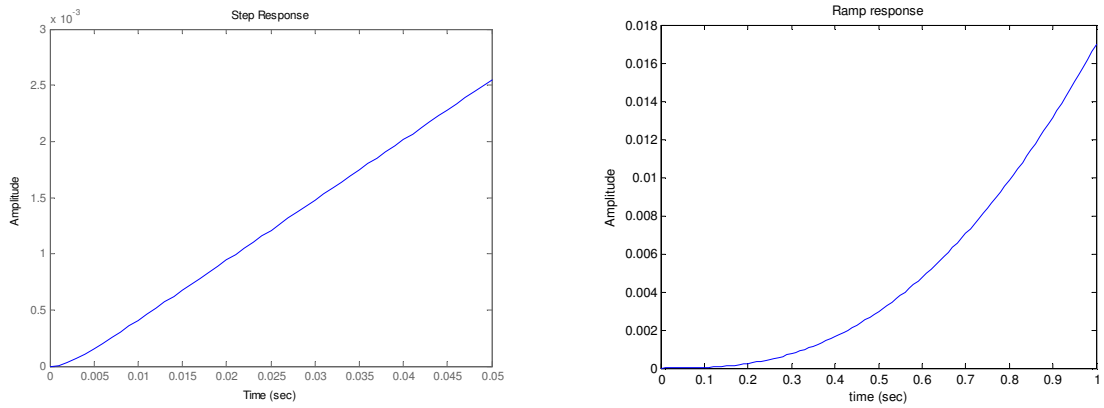


Figura VII.28 - Resposta do motor considerando a indutância.

Note-se que o sistema se comporta praticamente igual a um de primeira ordem, pois os coeficientes de s^2 e s^3 são muito pequenos e não influenciam na resposta.

Exemplo VII.6. Análise das respostas ao degrau e à rampa da Equação V.8.

$$\frac{\Theta_L}{V_a} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{\left(6,7 \cdot 10^{-6}\right) s^2 + \left(0,0028\right) s}$$

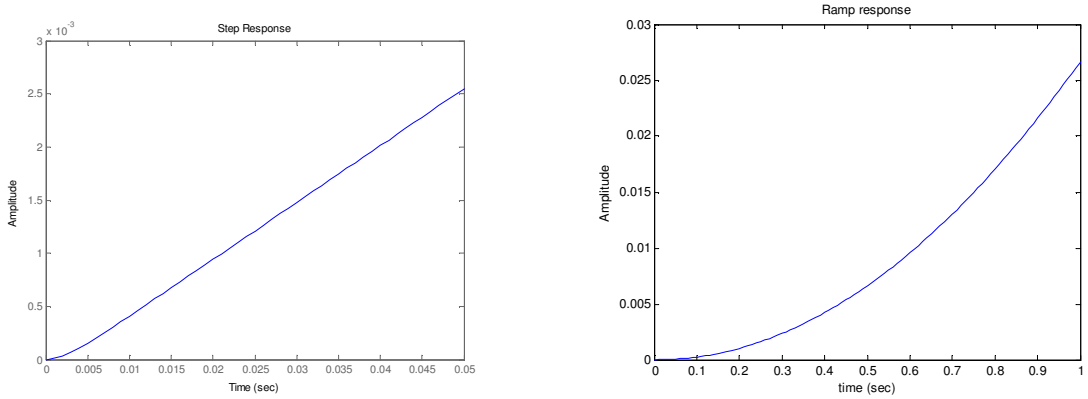


Figura VII.29 - Resposta do motor desconsiderando indutância.

Verifica-se que não existe diferença entre as respostas dos exemplos VII.5 e VII.6. Isso se deve ao fato do coeficiente de ordem 10^{-9} ser desprezível.

Exemplo VII.7. Curvas de voltagem sem carregamento nos eixos

Aplicando a Transformada de Laplace inversa na função de transferência V.8, obtém-se uma equação diferencial na variável $\underset{\sim}{\theta}$, em função da voltagem.

$$V_a = \left(\frac{R_a J_m}{n K_a} \right) \ddot{\theta}_L + \frac{1}{n} \left(\frac{R_a f_m}{K_a} + K_b \right) \dot{\theta}_L$$

Isso significa que, dadas as acelerações e velocidades de rotação do eixo de carga, é possível ter uma noção de como serão as curvas de voltagem necessárias para aplicar no motor.

Para efeito de ilustração será analisada a elipse apresentada no Exemplo VII.2. O diagrama de blocos abaixo foi construído em ambiente Simulink® e o tempo de simulação, 2 segundos.

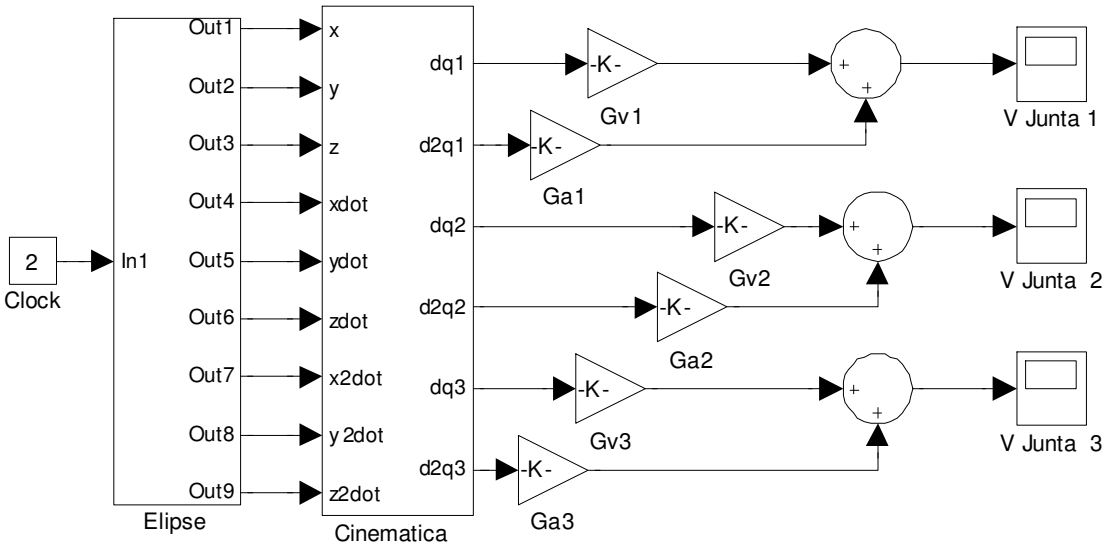
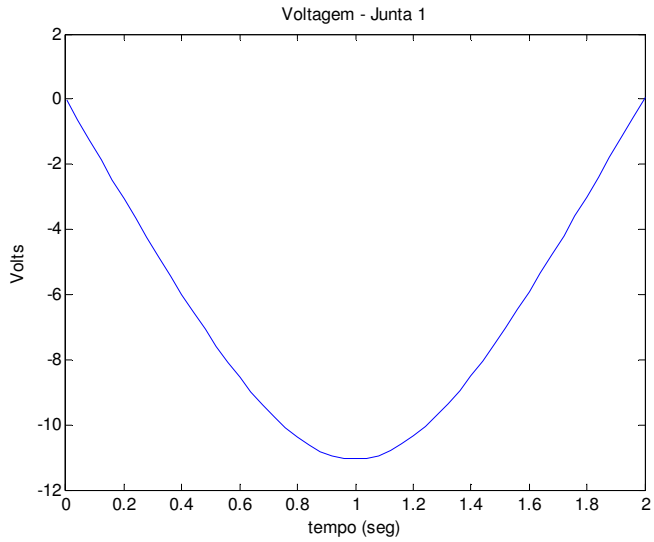
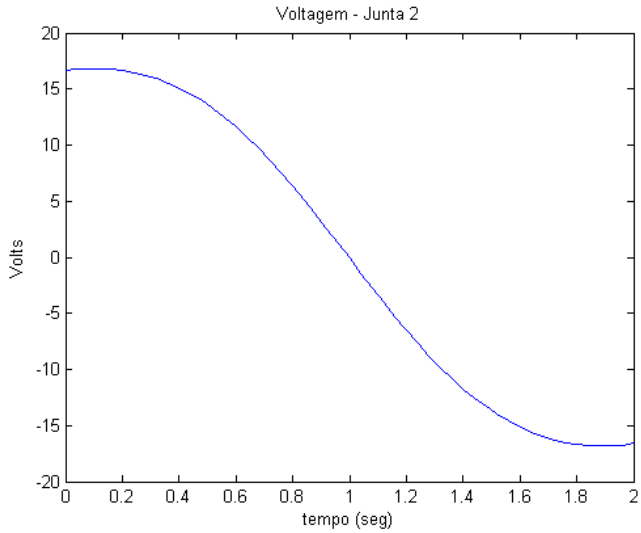


Figura VII.30 - Voltagem em função dos ângulos desejados.





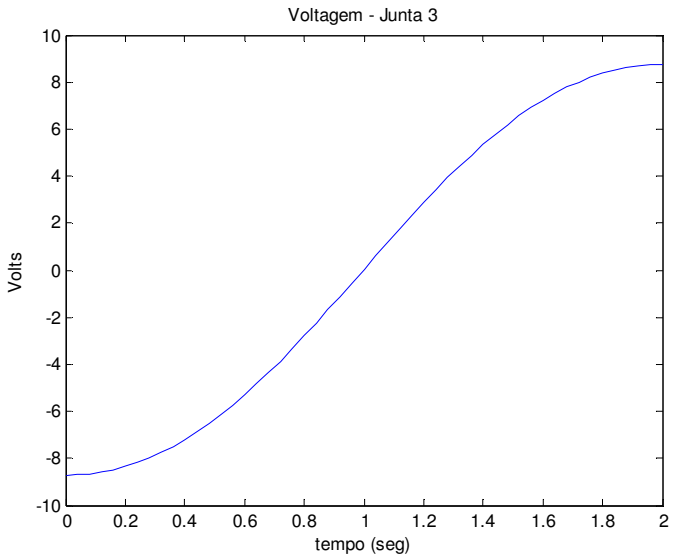


Figura VII.31 - Voltagem no eixo de saída sem carregamento.

Exemplo VII.8. Curvas de voltagem com carregamento nos eixos

Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, é possível obter uma expressão que considere também o torque no eixo de saída. A única diferença é que deve ser considerada a inércia da carga e o atrito viscoso na junta.

$$V_a = \left(\frac{R_a J_{eff}}{nK_a} \right) \ddot{\theta}_L + \frac{1}{n} \left(\frac{R_a f_{eff}}{K_a} + K_b \right) \dot{\theta}_L + \frac{nR_a \tau}{K_a}$$

O valor adotado para o coeficiente de atrito viscoso nas juntas foi arbitrado, enquanto que a inércia efetiva do sistema foi baseada na avaliação realizada através do Solidworks®.

$$f_L = 0.5\, Nms/rad \quad \text{e} \quad J_L = 1\, Kg \cdot m^2$$

Foram adotados os mesmos valores para as três juntas e a curva simulada foi a mesma do exemplo anterior.

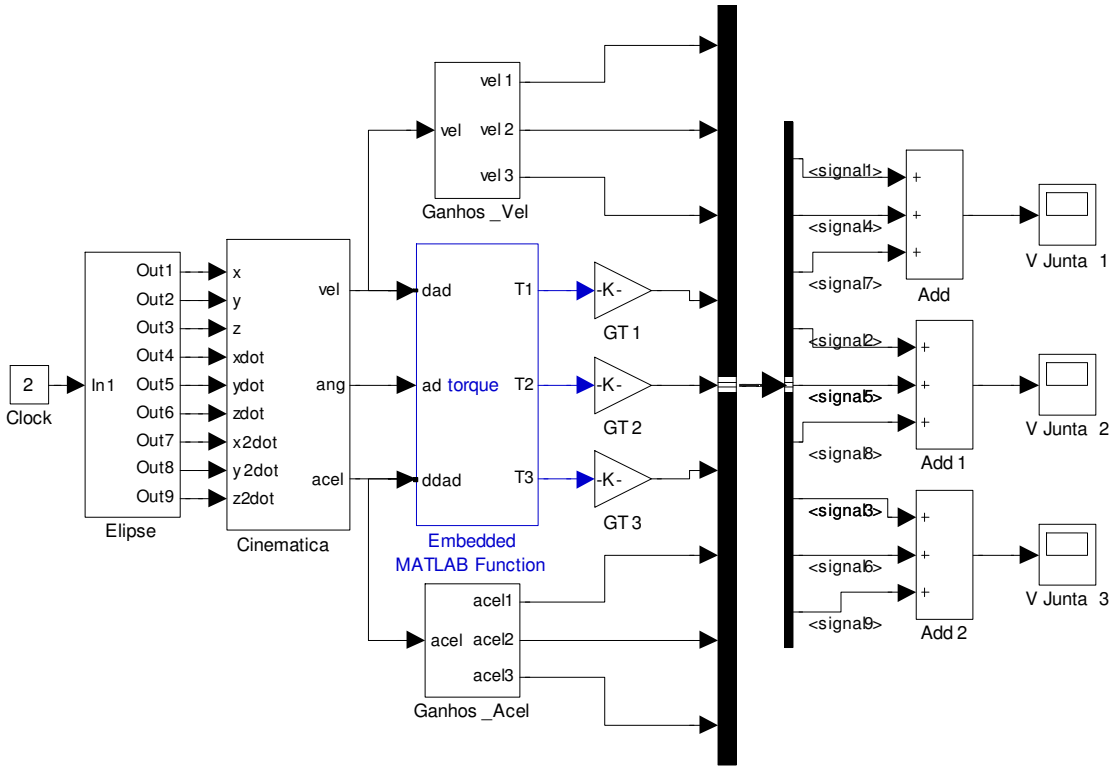


Figura VII.32 - Voltagem no eixo de saída com carregamento.

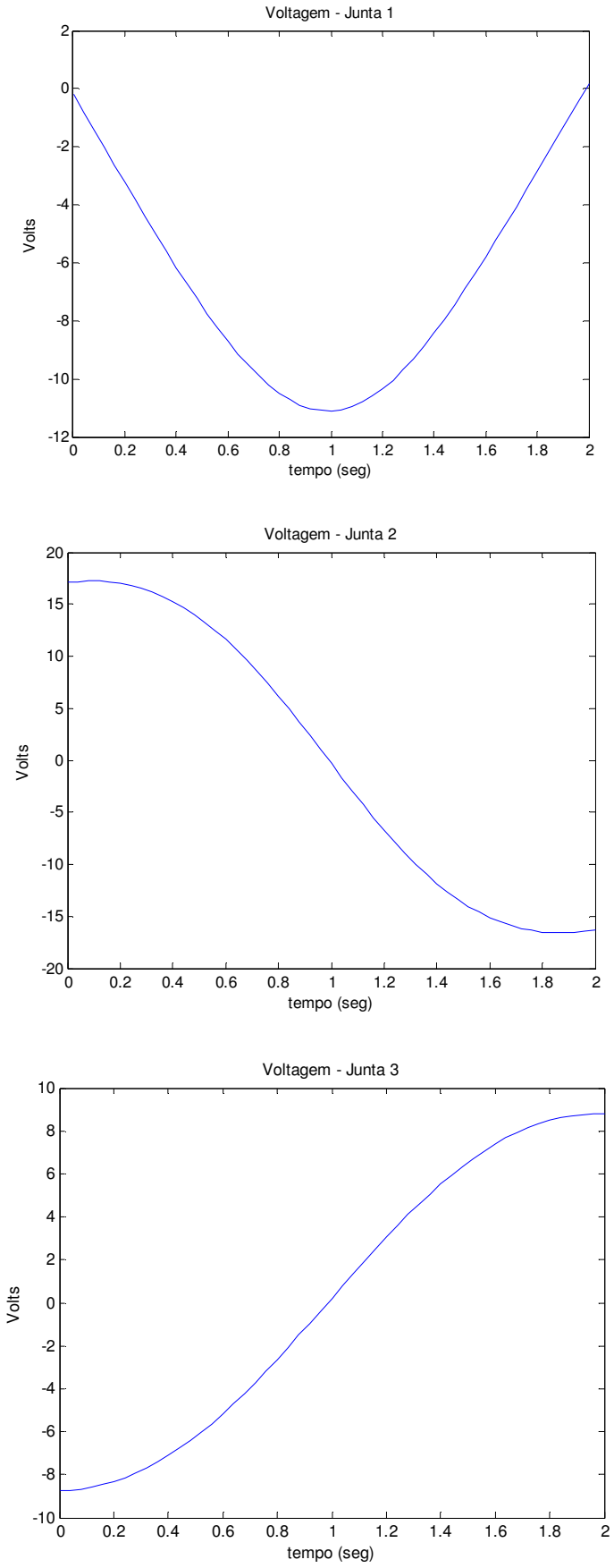


Figura VII.33 - Voltagem no eixo de saída com carregamento.

Graficamente, não se percebe diferença entre as figuras VII.31 e VI.33, pois tanto a inércia do mecanismo, quanto o atrito viscoso das juntas estão multiplicados pelo fator n^2, que é extremamente pequeno. Para efeito de comparação entre os dois exemplos a Tabela VII.2 apresenta alguns valores de voltagens na junta 2.

Tabela VII.2 - Comparativo de voltagens na junta 2.

Tempo (s)	Voltagem sem torque	Voltagem com torque
0	16,6259	17,0826
0,04	16,7474	17,1795
...	...	...
1,96	-16,7359	-16,4636
2	-16,6080	-16,3099

Exemplo VII.9. Análise das respostas ao degrau e à rampa da Equação V.11.

A Equação V.11 é o resultado, em malha fechada, do controle proporcional-derivativo aplicado no motor DC. Para viabilizar o seu estudo é preciso estimar os valores de ganhos de posição e velocidade, conforme as equações V.15, V.16 e V.17. Os parâmetros usados foram, $\omega_n = 100\,rad/s$; $\xi = 1,2$, $K_P = 9,086$ V e $K_D = 0,1051$ V.s.

$$\frac{\Theta_L}{\Theta_L^d} = \frac{(0,0039)s + 0,3362}{(3,4 \cdot 10^{-5})s^2 + 0,0067s + 0,3362}$$

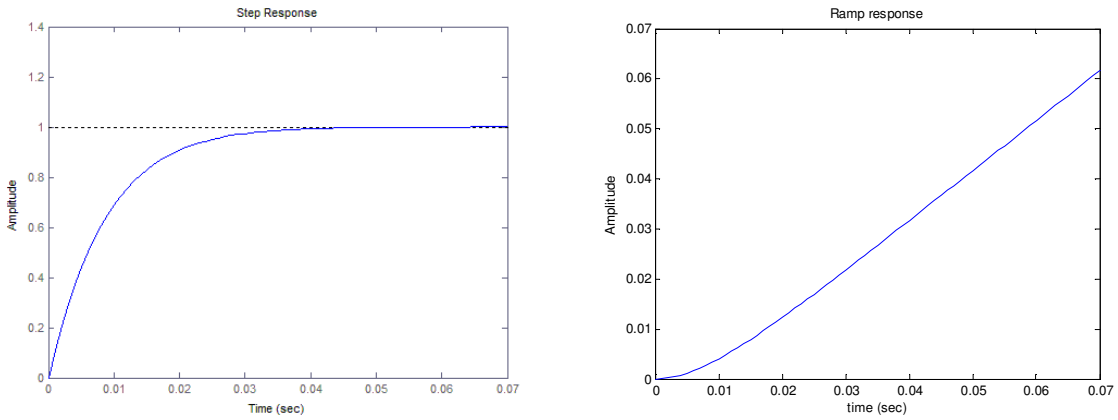


Figura VII.34 - Resposta do ângulo real em função do desejado.

Exemplo VII.10. Controle da perna em uma trajetória elíptica para o modelo teórico.

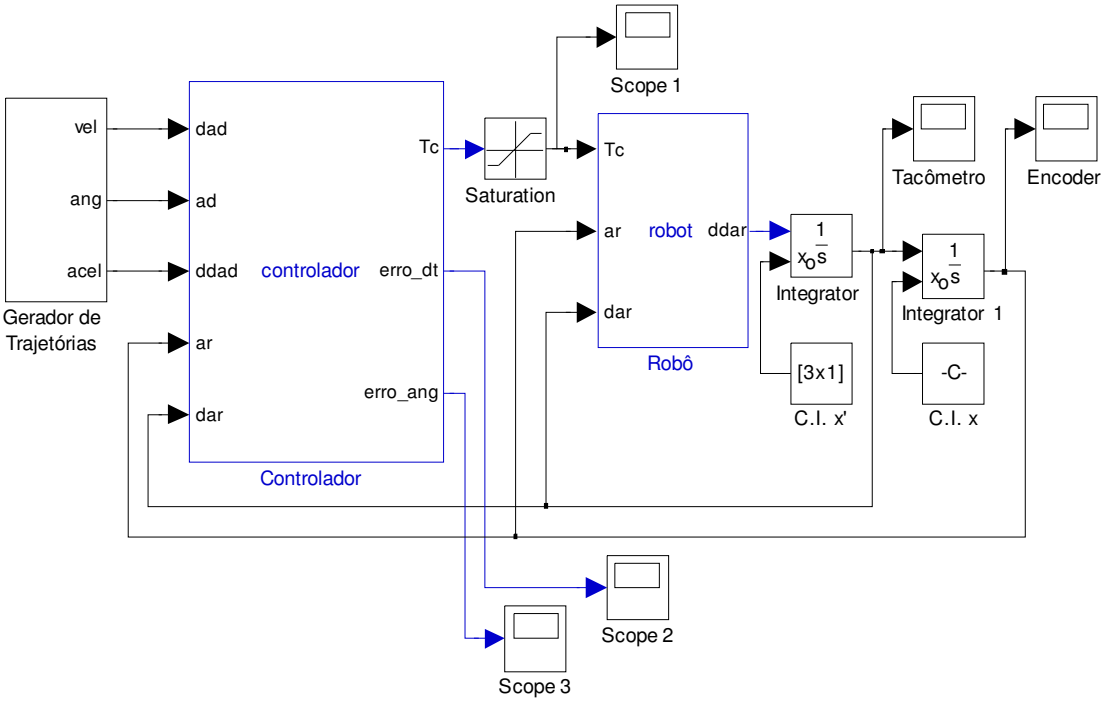


Figura VII.35 - Controlador.

Serão simuladas duas situações, uma com a extremidade da perna perto do início da trajetória, e a outra com a extremidade mais distante. A condição inicial para esta trajetória são as coordenadas $\underset{\sim}{\theta} = [1,9296 \quad 0,8273 \quad -1,8943]^T$ em radianos. As matrizes de ganhos proporcional e derivativo foram calculadas de acordo com V.23, para $\xi = 0,9$ e apresentam as mesmas dimensões do exemplo anterior.

$$K_P = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix}, \; K_D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 21,6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

Segundo QUARTERONI (2007), o método ODE 45, embora seja o mais preciso, nem sempre apresenta os melhores resultados. Os testes feitos com o controlador para este exemplo mostraram-se mais confiáveis com o método ODE 23.

Primeiro, admita que $\underset{\sim}{\theta} = [1,9199 \quad 0,8273 \quad -1,9199]^T$.

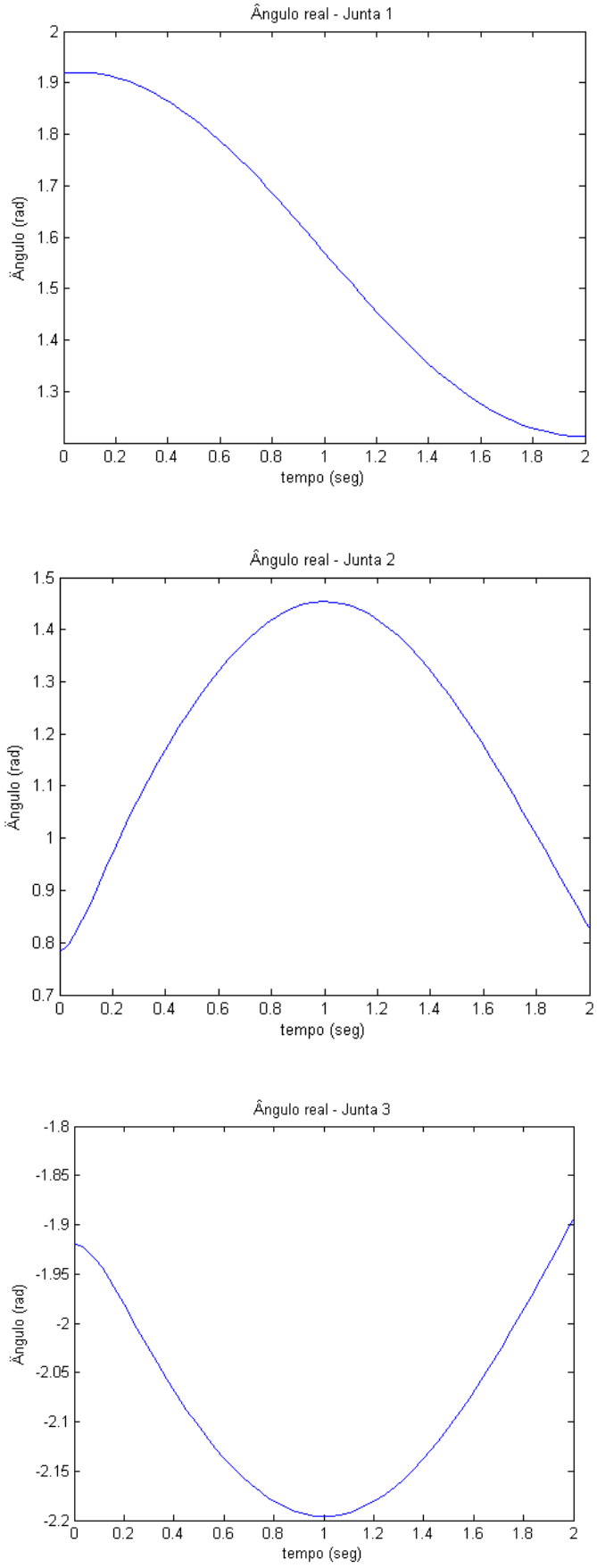


Figura VII.36 - Ângulo real (modelo teórico) para posição próxima do início da trajetória.

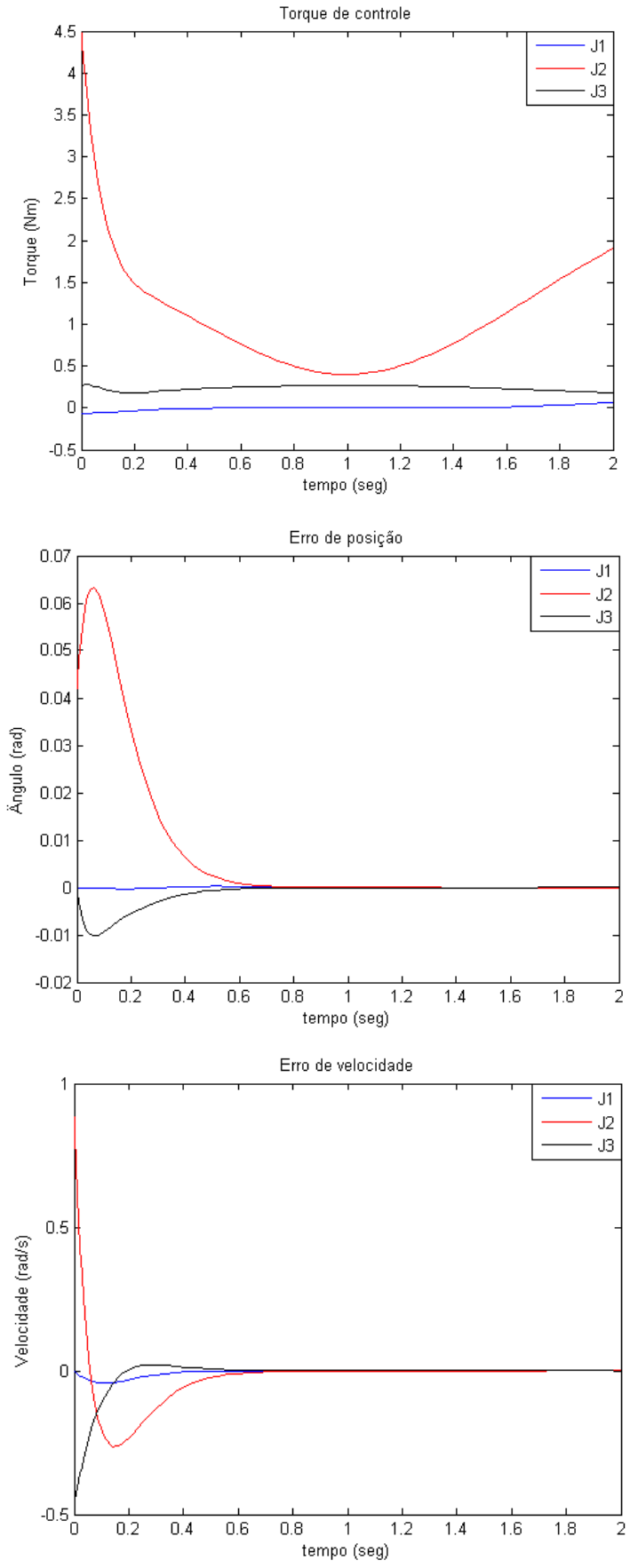


Figura VII.37 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no modelo teórico.

Agora, considere $\underset{\sim}{\theta} = [1,5708 \quad 0,8273 \quad -2,3562]^T$

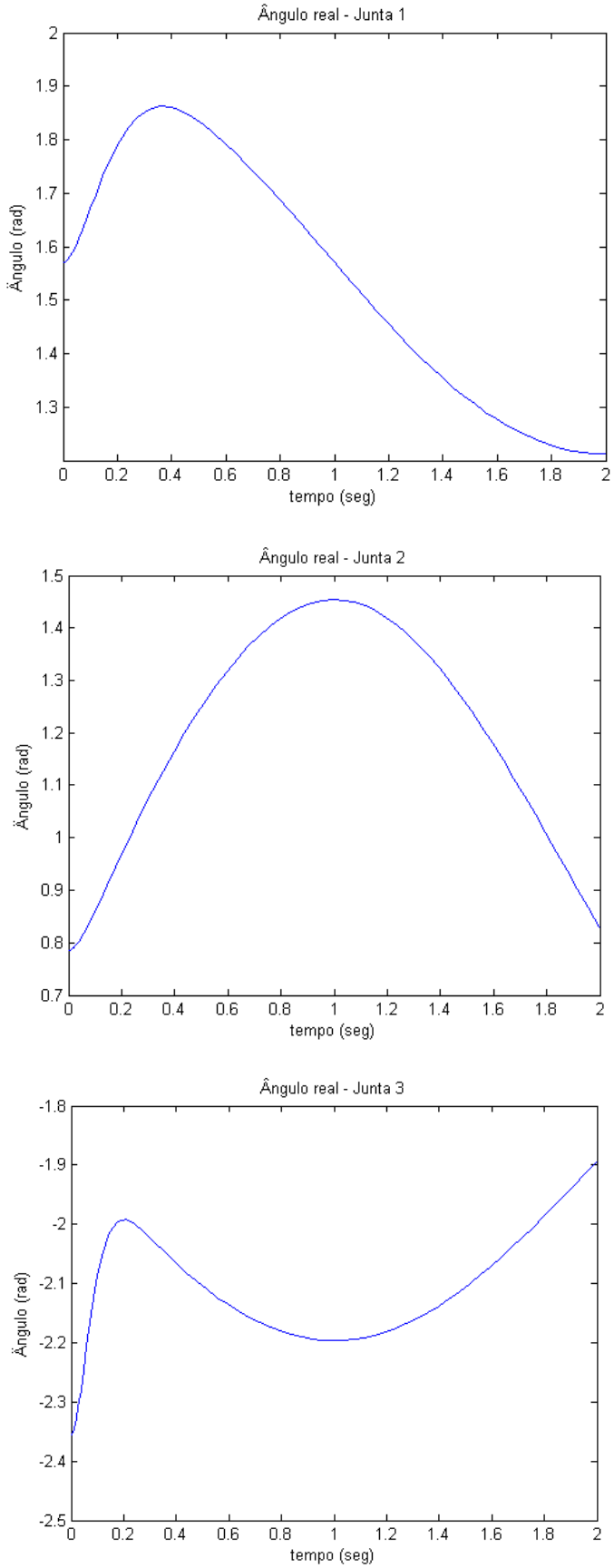


Figura VII.38 - Ângulo real (modelo teórico) para posição distante do início da trajetória.

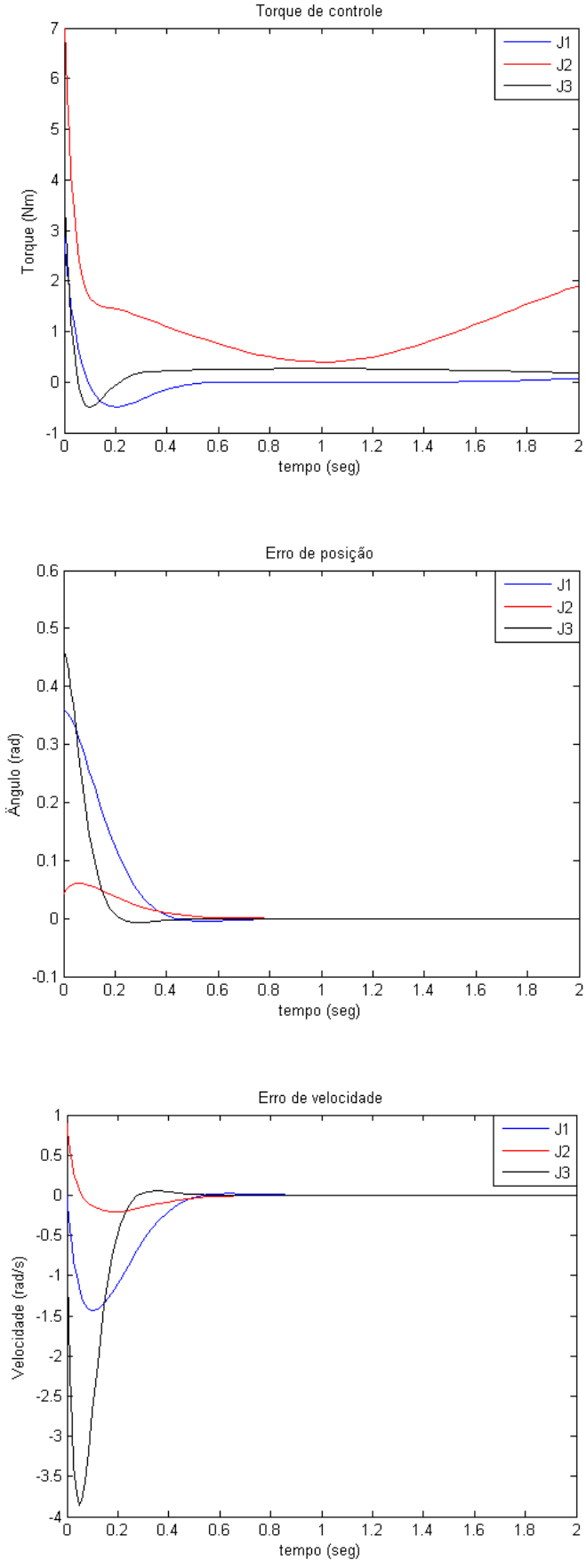


Figura VII.39 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no modelo teórico.

Observe que como a extremidade estava muito distante do ponto de partida da trajetória, o manipulador foi obrigado a fazer um movimento brusco em um curto intervalo de tempo. O resultado é que o torque de controle nos primeiros instantes ultrapassa o limite do redutor, que é de 7 Nm, e por isso foi necessário o uso da saturação na função do controlador. Mesmo assim, o sistema de controle mostrou-se robusto o suficiente para seguir a trajetória desejada.

Exemplo VII.11. Controle da perna em uma trajetória elíptica para o protótipo.

Serão utilizados os mesmos critérios e parâmetros do exemplo anterior. O diagrama de blocos é igual ao da Figura VII.35, salvo as alterações necessárias no algoritmo para a aplicação no protótipo. O ponto inicial da trajetória, em radianos, é dado por

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} 1,9296 & 0,8273 & -1,8943 \end{bmatrix}^T$$

sendo as condições iniciais e finais, também em radianos, respectivamente iguais a

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} 1,9199 & 0,8273 & -1,9199 \end{bmatrix}^T$$

na primeira simulação, e

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} 1,5708 & 0,8273 & -2,3562 \end{bmatrix}^T$$

na segunda. As matrizes de ganhos proporcional e derivativos utilizadas na simulação também serão as mesmas

$$K_P = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 21,6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

Os resultados obtidos na primeira simulação são:

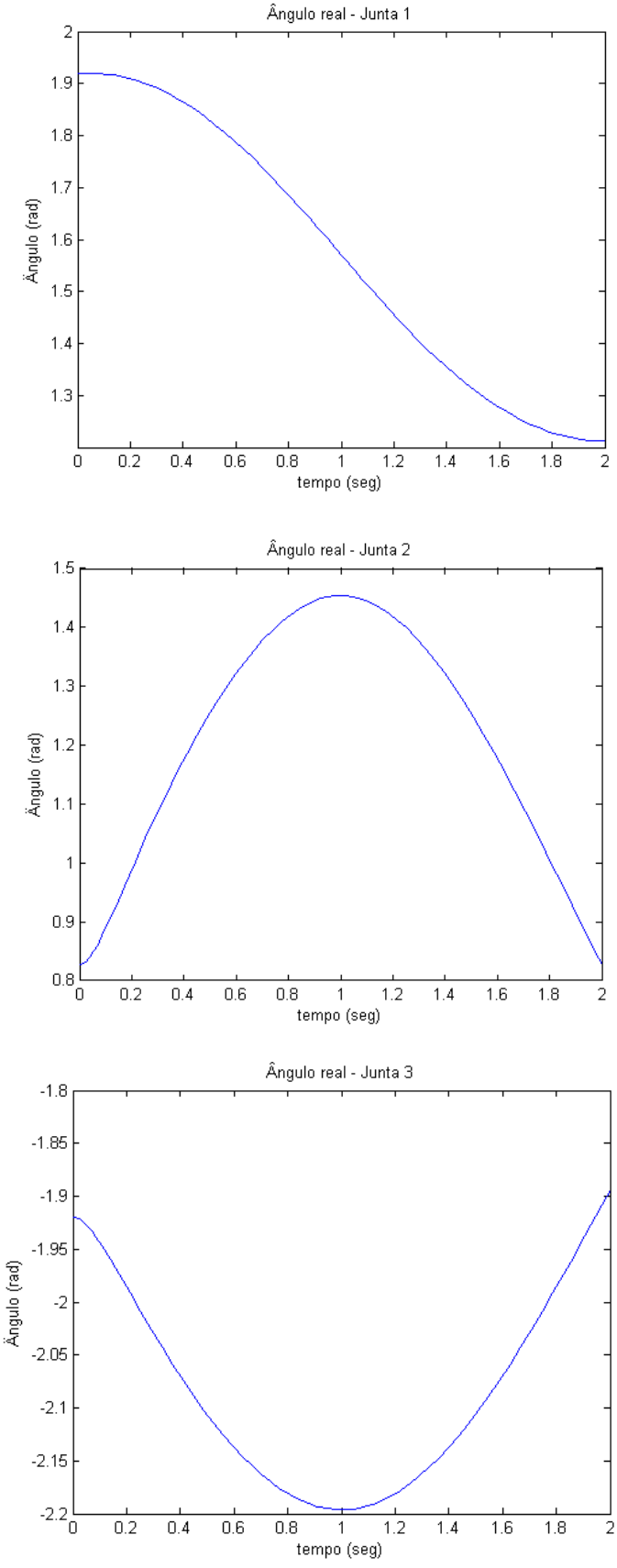


Figura VII.40 - ângulo real no protótipo para posição próxima do início da trajetória.

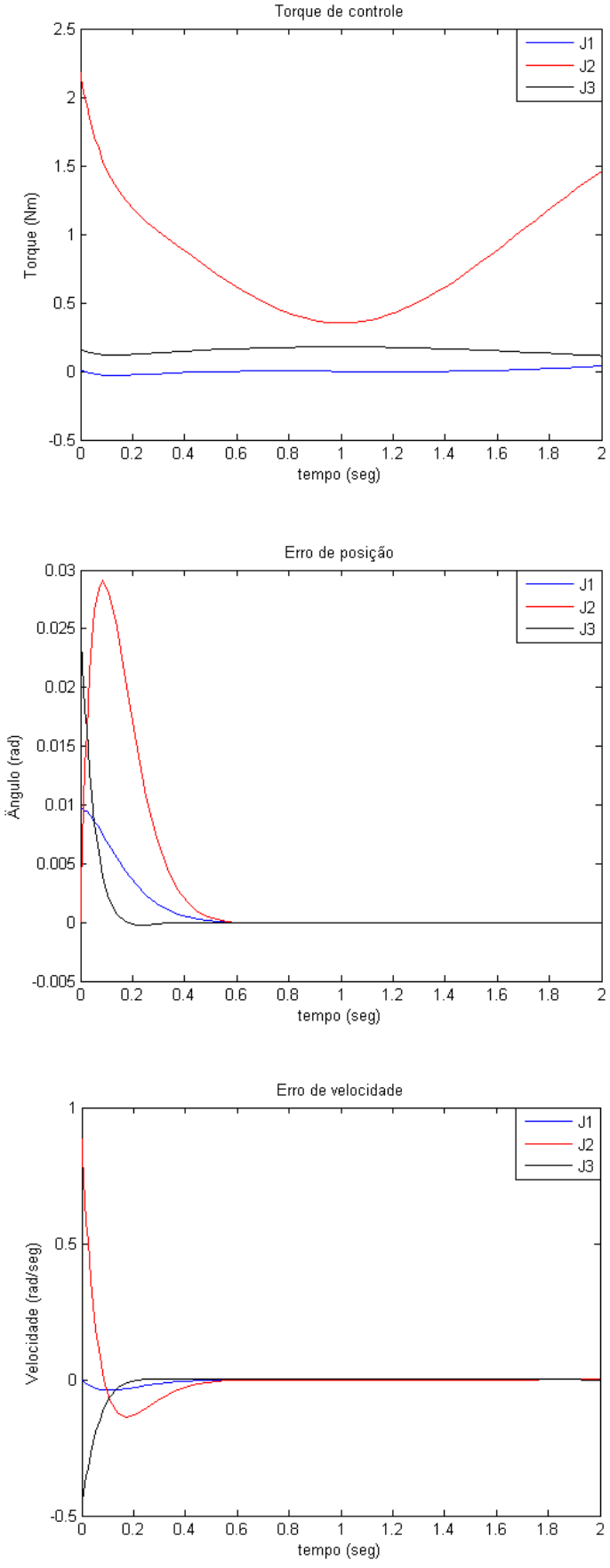


Figura VII.41 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no protótipo.

Para a segunda simulação os resultados obtidos foram:

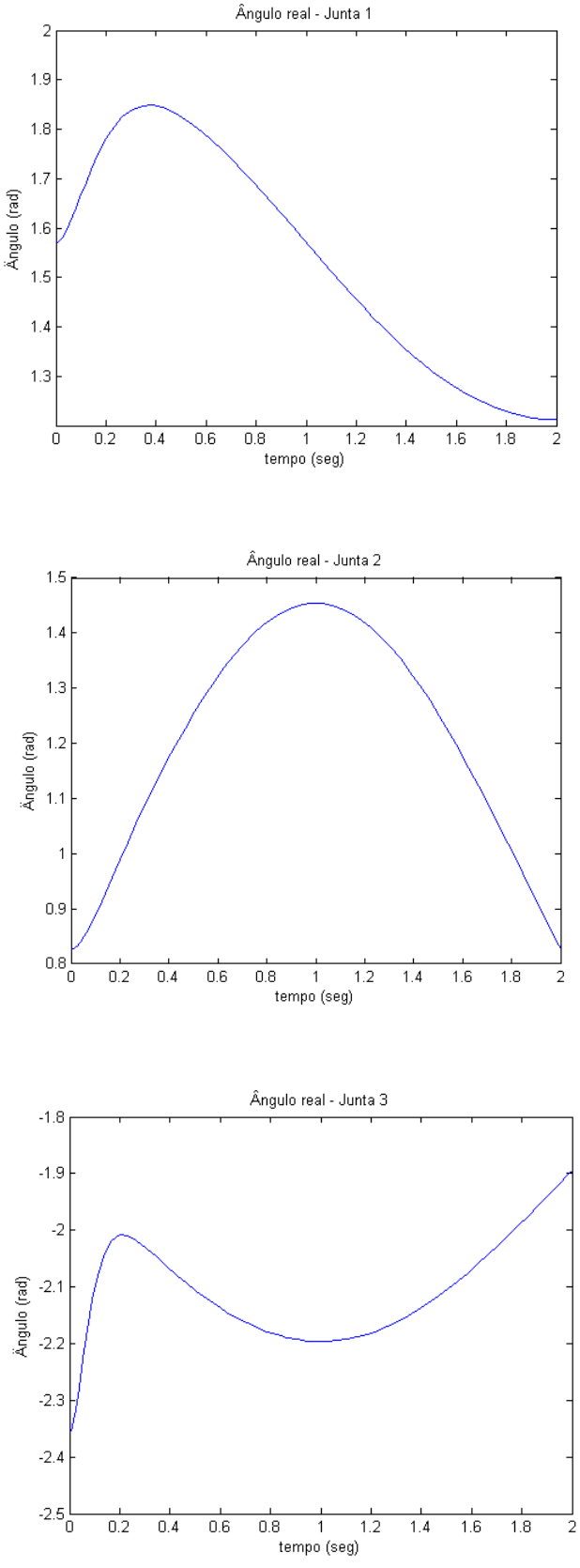
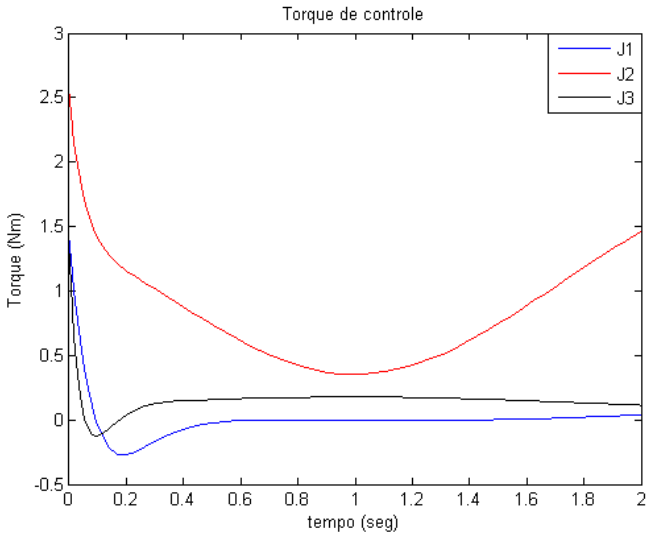
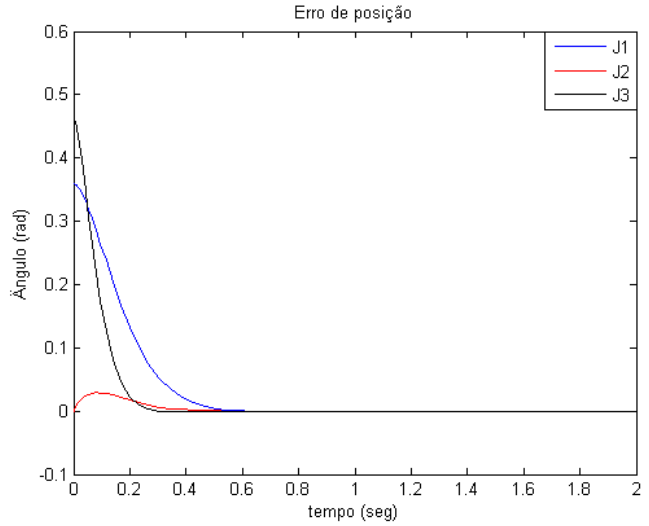


Figura VII.42 - ângulo real no protótipo para posição distante do início da trajetória.





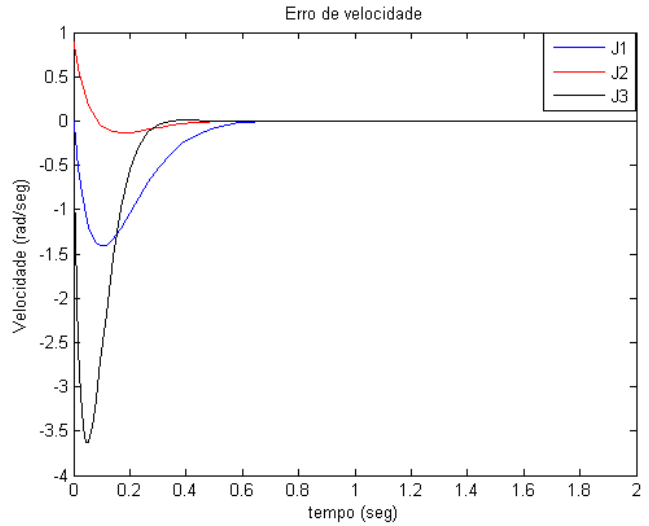


Figura VII.43 - Torque de controle e erros de posição e velocidade no protótipo.

Verifica-se um comportamento muito semelhante entre os resultados obtidos pelo modelo teórico e o protótipo com relação a erros de posição e velocidade, assim como na variação angular. Como já era previsto, os torques exigidos no protótipo são relativamente menores, de forma que na segunda simulação, quando a posição inicial da extremidade da perna está distante do início da trajetória, não se fez mais necessário o uso de saturação na função do controlador.

Capítulo VIII - Conclusões e Trabalhos Futuros

O presente trabalho apresentou uma proposta de mecanismo de três graus de liberdade para ser utilizada como perna de um robô hexápode.

A partir de um estudo dos tipos de robôs dotados de pernas, no qual foram abordados aspectos básicos de instrumentação, a evolução dos protótipos e os projetos de modelos desenvolvidos para as pernas, foi possível elaborar um modelo teórico que permitiu o desenvolvimento de algoritmos para a cinemática inversa, equações dinâmicas e controle.

Com o modelo matemático definido e com a garantia de estabilidade do sistema, trajetórias foram simuladas por meio de rotinas em MATLAB® e Simulink®. A coerência dos resultados foi a motivação para o desenvolvimento do projeto mecânico proposto no Capítulo VI.

O mecanismo foi desenvolvido em ambiente Solidworks®, que através de uma análise estrutural, fornece, além das informações básicas, como comprimento e massa dos elos, as respectivas matrizes de inércia.

Os algoritmos desenvolvidos para o torque dinâmico e para o controle precisaram ser adaptados, pois a estrutura do mecanismo projetado difere um pouco do modelo teórico no que diz respeito à posição dos motores e localização dos centros de gravidade. Novas rotinas foram simuladas e os resultados se mostraram satisfatórios e compatíveis com os resultados obtidos para o modelo teórico.

O controlador foi projetado segundo a técnica de torque computado e exigiu o conhecimento do modelo mecânico do sistema. As simulações foram capazes de seguir uma trajetória especificada, mesmo quando houve a necessidade de usar saturação.

Conclui-se, portanto, que esses algoritmos podem ser utilizados para produzir os movimentos de locomoção de um robô com o mecanismo desenvolvido neste trabalho.

As etapas futuras que se seguirão após a conclusão deste trabalho consistem em:

- Realizar os cálculos estruturais do mecanismo.
- Fazer os desenhos de fabricação das peças mecânicas do mecanismo.
- Construir um primeiro protótipo e realizar testes experimentais para validar os algoritmos de controle.

Como sugestão de trabalhos futuros, podem ser citados alguns aspectos que não foram abordados:

- Aprimorar os programas para trabalharem com curvas singulares. Com isso, objetiva-se que o robô possa andar de cabeça para baixo e que novos algoritmos de controle sejam elaborados.

- Inserir ao controlador um algoritmo adaptativo utilizando técnicas de inteligência artificial, visando otimizar os parâmetros das matrizes de ganho proporcional e derivativo.

- Implementar no sistema de controle não linearidades, como folga, atrito nas juntas e flexibilidade dos elos.

- Desenvolver um projeto mecânico para o pé do robô.

Referências Bibliográficas

ACKERMAN, Evan. Boston Dynamics AlphaDog Quadruped Robot Prototype on Video. In: *IEEE Spectrum*, Robotics Blog, September 2011. Disponível em <http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/military-robots/boston-dynamics-alphadog-prototype-on-video>. Acesso em 05 jan. 2012.

AHMADI, M.; BUEHLER, M.; "The ARL Monopod II Running Robot: Control and Energetics", *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1999.

AKHTARUZZAMAN, Md.; SHAFIE, A. A.; "Advancement of Android and Contribution of Various Countries in the Research and Development of the Humanoid Platform", *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 1, 2010.

ANGLE, C.; *Genghis, a Six-Legged Autonomous Walking Robot*. Science Bachelor Thesis in Electrical Engineering and Computer Science, MIT, 1989.

ANGLE, C.; BROOKS, R. A.; "Small Planetary Rovers". In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, Munich, Germany, pp. 383–388, 1990.

ARIKAWA, K.; HIROSE, S.; "Development of Quadruped Walking Robot TITAN-VIII'. In: *Proc. of the IEEE Intelligent Robots and Systems*, 1996.

AYERS, J.; WITTING, J.; "Biomimetic Approaches to the Control of Underwater Walking Machines". In: *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2007.

BAI, S.; LOW, K.; GOU, W.; "Kinematographic Experiments on Leg Movement and Body Trajectories of Cockroach Walking on Different Terrain". In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2000.

BARES, J. E.; WETTERGREEN, D.; "Dante II: Technical Description, Results and Lessons Learned", *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, nº 7, 1999.

BARRETO, João P. A.; RIBEIRO, António R. T.; *Controlo da Locomoção de um Robô de Seis Pernas*, Laboratório de Robótica Móvel, Instituto de Sistemas e Robótica, Universidade de Coimbra, 1997.

BEKKER, M. G.; “Is the Wheel the Last Word in Land Locomotion?”, *New Scientist*, nº 248, 1961.

BINNARD, M. B.; *Design of a Small Pneumatic Walking Robot,* Master’s Thesis, MIT, 1995.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 6ª edição, LTC Editora, 1998.

BRITTON, Peter. "Engineering the New Breed of Walking Machines", *Popular Science*, September 1984.

BROOKS, R. A.; “Robot That Walks; Emergent Behaviors from a Carefully Evolved Network”. In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 135–142, May 1989.

BUSCHMANN, T.; LOHMEIER, S.; ULBRICH, H.; “Humanoid Robot LOLA: Design and Walking Control”. *Journal of Physiology-Paris*, Elsevier, 2009.

CHEVALLEREAU, C.; BESSONNET, G.; ABBA, G.; AOUSTIN, Y.; *Bipedal Robots: Modeling, Design and Building Walking Robots,* John Wiley & Sons, Inc., 2009.

CONFENTE, M.; COSMA, C.; FIORINI, P.; BURDICK, J.; “Planetary Exploration Using Hopping Robots”. In: *7th ESA Workshop on Advanced Space Technologies for Robotics and Automation*, 2002.

CORDES, S.; BERNS, K.; “Sensor Components of the Six-Legged Walking Machine LAURON II”, *Int. Conf. Advanced Robotics*, pp. 71–76, 1997.

COSTA MELLO, V.; *Simulação de um Sistema de Controle para Robôs Hexápodes*, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

CRAIG, J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. 2th edition, Addison-Wesley Longman, 1989.

CRUSE, H.; “The Function of the Legs in the Free Walking Stick Insect, Carausius Morosus”, *J. Comp. Physiol.*, vol. 112, 1976.

CRUSE, H.; DÜRR, V.; SCHIMITZ, J.; “Insect Walking is Based on a Descentralized Architeture Revealing a Simple and Robust Controller”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2007.

CSIC; *The SILO-4 Walking Robot – A Walking Machine for Educational and Basic Research Purposes*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), 2000.

DAERDEN, F.; LEFEBER, D.; “Pneumatic Artificial Muscles: Actuators for Robotics and Automation”, *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, vol. 47, 2002.

DE SANTOS, P. G. et al. *Dessarollo de Robots Caminantes y Escaladores em El IAI-CSIC*, Departamento de Control Automático, Instituto de Automática Industrial, CSIC, Madri, 2007.

DO CARMO, M. P.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

DUPUIS, E.; MONTMINY, S.; FARHAT, M.; CHAMPLIAUD, H.; “Mechanical Design of a Hopper for Planetary Exploration”. In: *Proc. of the 9th ESA Workshop on Advanced Space Technologies for Robotics and Automation*, 2006.

ESPENSCHIED, K.; QUINN, R.; BEER, R.; CHIEL, H.; “Biologically Based Distributed Control and Local Reflexes Improve Rough Terrain Locomotion in a Hexapod Robot”, *Robotics and Automation Systems*, Elsevier, 1996.

FERREL, C.; A Comparison of Three Insect Inspired Locomotion Controllers. In: *Robotics and Autonomous Systems*, Elsevier, vol. 16, pp. 135-159, 1995

FERREL, C.; "Robust and Adaptive Locomotion of an Autonomous Hexapod”. In: *Proc. of International Conference from Perception to Action*, pp. 66-77, 1994.

FIELDING, Michael R. et al.; "Hamlet: Force/Position Controlled Hexapod Walker - Design and Systems". In: *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Control Applications*, pp. 984-989, 2001.

FU, K. S.; GONZALEZ, R. C.; LEE, C. S. G.; *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence,* Mc Graw Hill Book Company, 1987.

FUKUOKA, Y.; KATABUCHI, H.; KIMURA, H.; “Dynamic Locomotion of Quadrupeds Tekken 3&4 Using Simple Navigation”. In: *Journal of Robotics and Mechatronics*, vol. 22, nº 1, 2010.

FULL, R.; TU, M.; “Dynamics of Insect Locomotion Compared to Hexapod Walking Machines”. In: *Modeling and Control of Biomechanical Systems*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 17, 1989.

GEPPERT, L.; “Qrio, the Robot that Could”, *IEEE Spectrum*, vol. 41, nº 5, May 2004.

GO, Y.; YIN, X.; BOWLING, A.; “Navigability of Multi-Legged Robots”. In: *IEEE American Society of Mechanical Engineerers*, Transactions on Mechatronics, vol. 11, nº 1, 2006.

GÖNER, M. et al.; "The DLR-Crawler: A Testbed for Compliant Hexapod Walking Based on the Fingers of DLR-Hand II". In: *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2008.

GOUAILLIER, David et al. “Mechatronic of NAO Humanoid”. In: *Proc of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009.

GREGORIO, P.; AHMADI, M.; BUEHLER, M.; “Design, Control and Energetics of an Eletrically Actuated Legged Robot”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 27, nº 4, 1997.

GURFINKEL, V. S. et al. “Walking Robot with Supervisory Control”. In: *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, pp. 31-36, 1981.

HAHN, B.; VALENTINE, D.; *Essential MATLAB® for Engineers and Scientists,* 3th edition, Elsevier, 2007.

HARTENBERG, R. S.; DENAVIT, J.; *Kinematic Synthesis of Linkages*, Mc Graw Hill, 1964.

HIRAI, K.; HIROSE, M.; HAIKAWA, Y.; TAKENAKA, T.; “The Development of Honda Humanoid Robot”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 1998.

HIROSE, S.; UMETANI, Y.; “The Basic Motion Regulation System for Quadruped Walking Vehicle”. In: *Proc. of the American Society of Mechanical Engineers*, Design Engineering Technical Conference, 1980.

HIROSE, S. et al. “TITAN III: A quadruped Vehicle – Its Structure and Basic Characteristics”, *Robotic Research: The Second International Symposium*, 1985.

HIROSE, S.; KUNIEDA, S.; “Generalized Standart Foot Trajectory for a Quadruped Walking Vehicle”, *The Int. Journal of Robotics Research*, MIT Press, 1991.

HIROSE, Shigeo; KATO, Keisuke. *Study on Quadruped Walking Robot in Tokyo Institute of Technology - Past, Present and Future*, Dept.of Mechano-Aerospace Eng., Tokyo Institute of Technology, Japan, pp. 414-419, 2000.

HIROSE, S. et al. “Quadruped Walking Robots at Tokyo Institute of Technology – Design, Analysis and Gait Control Methods”, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2009.

HOLOPAINEN, J.; *carausius-morosus.jpg*. Formato JPEG, 1 fotografia, color. Finlândia, 2008. Disponível em <http://www.pbase.com/holopain/image/103507999 >. Acesso em 19 jun. 2010.

HONDA. *ASIMO – Technical Information*. Honda Motor Co., Ltd. September 2007.

KAJITA, Shuuji et al. Successful Development of a Robot with Appearance and Performance Similar to Human for the Entertainment Industry. *National Institute of Advanced Industrial Science and Technology* (AIST), 2009. Disponível em < http://www.aist.go.jp/aist_e/latest_research/2009/20090513/20090513.htm >. Acesso em 05 jan. 2012.

KANEKO, Kenji et al. “Humanoid Robot HRP-2”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 2004.

KATIC, D.; VUKOBRATOVIC, M.; “Intelligent Soft-Computing Paradigms for Humanoid Robots”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2002.

KATO, Ichiro. “Development of WABOT 1”, *Biomechanism 2*, The University of Tokyo Press, pp. 173-214, 1973.

KATO, Ichiro et al. “The Robot Musician WABOT-2 (Waseda Robot 2)”, *Robotics*, vol. 3, nº 2, 1987.

KECSKÉS, I.; ODRY, P.; “Walk Optimization for Hexapod Walking Robot”, *10th International Symposium of Hungarian Researches on Computational Intelligence and Informatics*, 2009.

KELLY, R.; SANTIBÁÑEZ, V.; LORÍA, A. *Control of Robot Manipulator in Joint Space*. Springer, 2005.

KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Michigan State University, 2th edition, Prentice Hall, 1996.

KINGSLEY, D. A., QUINN, R. D., RITZMANN, R. E.; "A Cockroach Inspired Robot with Artificial Muscles", *International Symposium on Adaptive Motion of Animals and Machines (AMAM)*, Kyoto, Japan, 2003.

KINGSLEY, D. A.; *A Cockroach Inspired Robot with Artificial Muscles*, Ph.D. Thesis, Case Western Reserve University, January 2005.

KLAASSEN, B.; LINNEMANN, R.; SPENNENBERG, D.; KIRCHNER, F.; “Biomimetic Walking Robot Scorpion: Control and Modeling”, *Robotics and Autonomous Systems Journal*, 2001.

KLEIN, C. A.; BRIGGS, R. L.; “Use of Active Compliance in the Control of Legged Vehicles”. In: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 10, pp. 393-399, July 1980.

KLUTE, G.; CZERNIECKI, J.; HANNAFORD, B.; “McKibben Artificial Muscles: Pneumatic Actuators with Biomechanical Intelligent Mechatronics”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, 1999.

KOYACHI, N.; ADACHI, H.; IZUMI, M.; HIROSE, T.; “Control of Walk and Manipulation by a Hexapod with Integrated Limb Mechanism: MELMANTIS-1”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 2002.

KRAM, R.; WONG, B.; FULL, R.; “Three Dimensional Kinematics and Internal Mechanical Energies of Running Cockroaches”, *Journal of Experimental Biology*, 1994.

LASA, M.; *Dynamic Compliant Walking of the SCOUT II Quadruped*, Master's Thesis, McGill University, Canadá, 2000.

LEGO MINDSTORMS. *mindstormsnxtspike.jpg*. Formato JPEG. Disponível em < http://cache.gizmodo.com/assets/images/4/2006/04/mindstormsnxtspike.jpg>. Acesso em 12 jan. 2012.

LEWINGER, W. A.; *Insect-Inspired, Actively Compliant Robotic Hexapod*, Master's Thesis, Case Western University, 2005.

LEWIS, F.; ABDALLAH, C. *Robot Manipulator Control – Theory and Pratice,* 2th edition revised and expanded, Marcel Dekker Inc, 2004.

LIANG, C.; CECCARELLI, M.; CARBONE, G.; *Design and Simulation of Legged Walking Robots in MATLAB® Environment*, Laboratory of Robotics and Mechatronics (LARM), University of Cassino, Italy, 2011.

LIM, H.; TAKANISHI, A.; "Biped Walking Robots Created as Waseda University: WL and WABIAN Family', *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2007.

LÖFFLER, K.; GIENGER, M.; PFEIFFER, F.; "Sensors and Control Concept of Walking "Johnnie"', *The International Journal of Robotics Research*, 2003.

LOHMEIER, S.; BUSCHMANN, T.; ULBRICH, H.; PFEIFFER, F.; "Modular Joint Design for Performance Enhanced Humanoid Robot LOLA". In: *Proc. of the IEEE Robotics and Automation*, 2006.

LYNXMOTION. p*hoehr02.jpg*. Formato JPEG. Disponível em: < http://www.lynxmotion.com/images/hi-res/phoehr02.jpg >. Acesso em 19 jun. 2010.

LYNXMOTION. *apod02.jpg*. Formato JPEG. Disponível em < http://www.lynxmotion.com/images/jpg/apod02.jpg >. Acesso em 12 jan. 2012.

MC GHEE, R. B.; "Finite State Control of Quadruped Locomotion", *Second Int. Symposium on External Control of Extremities*, 1966.

MERIAM, J. L. *Dinâmica*. 2ª edição, LTC Editora, 1994.

MOSHER, R. *Handyman to Hardiman*, SAE Technical Paper 670088, 1967.

MOSHER, R. “Test and Evaluation of Versatile Walking Truck”, *Off-Road Mobility Research Symposium*, Int. Society for Terrain Vehicle Systems, 1968.

NISE, N. *Control Systems Engineering*. 6th edition, John Wiley & Sons Inc, 2011.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4ª edição, Pearson Prentice Hall, 2003.

OGURA, Yu et al. “Development of a New Humanoid Robot WABIAN-2”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2006.

PAPADOPOULOS, D.; *Stable Running for a Quadruped Robot with Compliant Legs*, Master’s Thesis, McGill University, Canadá, 2000.

PAUL, R. P. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, 1981.

PFEIFFER, F.; WEIDEMANN, J.; DANOWSKI, P.; “Dynamics of the Walking Stick Insect”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990.

PFEIFFER, F.; "The TUM Walking Machines". In: *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pp. 109-131, 2007.

PLAYTER, R. R.; RAIBERT, M. H.; “Control of a Biped Somersault in 3D”. In: *Proc. of the IEEE Intelligent Robots and Systems*, 1992.

POULAKAKIS, I.; SMITH, J. A.; BUEHLER, M.; “Modeling Experiments of Untethered Quadrupedal Running with a Bounding Gait: The SCOUT II Robot”, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 24, nº 4, 2005.

PRATT, J.; PRATT, G.; ‘Intuitive Control of a Planar Bipedal Walking Robot”. In: *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation*, 1998.

PROVENZA, Francesco. *Desenhista de Máquinas*. 46ª edição, editora F. Provenza, São Paulo, 1991.

PROVENZA, Francesco. *Projetista de Máquinas*. 71ª edição, editora F. Provenza, São Paulo, 1996.

QUARTERONI, A.; SALERI, F. *Cálculo Científico com MATLAB® e Octave*. Springer, 2007.

RAIBERT, Mark H.; "Legged Robots", *Communications of the ACM*, Vol. 29, nº 6, June 1986.

RAIBERT, Mark H. et al. *Dynamically Stable Legged Robots*, Report LL-6, Leg Laboratory, MIT, 1989.

RAIBERT, Mark H.; "Trotting, Pacing and Bounding by a Quadruped Robot". *Journal of Biomechanics*, vol. 23, Elsevier, 1990.

RAIBERT, M.; BLANKESPOOR, K.; NELSON, G.; PLAYTER, R.; "BigDog, the Rough-Terrain Quadruped Robot". In: *Proc. of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control*, 2008.

ROMANO, V. F. *Apostila do curso de Robótica*. DEM/UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

RÖNNAU, A.; KERSCHER, T.; DILLMANN, R.; "Dynamic Position/Force Controller of a Four Degree-of-Freedom Robotic Leg", *Robot Motion and Control*, pp. 117-126, Springer, 2011.

ROSHEIM, Mark E.; "In the Footsteps of Leonardo", *IEEE Robotics & Automation Magazine,* vol. 4; nº 2; pp. 12-14, 1997.

RUSSELL Jr., Marvin.; "ODEX I: The First Functionoid", *Robotics Age*, September/October 1983.

SANTOS, W.; ALENCAR, H. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. IMPA, 2003.

SCHELL, S.; TRETTEN, A.; BURDICK, J.; FULLER, J.; FIORINI, P. *Hopper on Wheels: Envolving the Hopping Robot Concept*, 2001. Disponível em: <http://www.nasa.gov>. Acesso em 17 jan. 2012.

SCHNEIDER A.; SCHMUCKER, U. *Force Sensing for Multi-Legged Walking Robots: Theory and Experiments Part 1: Overview and Force Sensing, Mobile Robotics, Moving Intelligence*, ISBN: 3-86611-284-X, InTech, 2006. Disponível em: <http://www.intechopen.com/articles/show/title/force_sensing_for_multi-legged_walking_robots__theory_and_experiments_part_1__overview_and_force_sen>. Acesso em 17 jan. 2012.

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL; *Músculos Artificiais*, edição 18, novembro de 2003.

SEENI, A.; SCHÄFER, B.; HIRZINGER, G. *Robot Mobility Systems for Planetary Surface Exploration – State-of-the-Art and Future Outlook: A Literature Survey*. Aerospace Technologies Advancements, ISBN: 978-953-7619-96-1, InTech, 2010. Disponível em: <http://www.intechopen.com/articles/show/title/robot-mobility-systems-for-planetary-surface-exploration-state-of-the-art-and-future-outlook-a-liter>. Acesso em 17 jan. 2012.

SHIGLEY, J. E. *The Mechanics of Walking Vehicle.* Ann Arbor: University of Michigan Press, 1960.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. *Handbook of Robotics.* Springer, 2008.

SIEGWART, R.; NOURBAKHSH, I. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press, 2004.

SILVA, Manuel F. S. *Sistemas Robóticos de Locomoção Multipernas*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2005.

SLOTINE, J. J.; WEIPING, LI. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

SONG, Shin-Min; WALDRON, Kenneth, J. *Machines that walk: The Adaptive Suspension Vehicle*. The MIT Press, 1989.

SONY; *Site oficial do robô AIBO*. Disponível em <http://support.sony-europe.com/AIBO/>. Acesso em 05 jan. 2012.

SPONG, M.; VIDYASAGAR, M. *Robotic Dynamic and Control*. John Wiley, USA, 1989.

STRANG, G. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley Cambridge Press, 1986.

SUTHERLAND, Ivan E.; RAIBERT, Mark H.; "Machines That Walk", *Scientific American*, vol. 248, nº 1, pp. 32-41, January 1983.

TCHEBICHEFF, P. *Sur La Transformation du Movement Rotatoire en Mouvement Sur Certaines Lignes, à L'aide de Systèmes Articulés*. Boletim da Sociedade Matemática da França (S.M.F), tomo 12, pp. 179-187, 1884. Disponível em: <http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF_1884__12_/BSMF_1884__12__179_1/BSMF_1884__12__179_1.pdf >. Acesso em 17 jan. 2012.

TENENBAUM, R. *Dinâmica*. Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1987.

TEODORESCU, P. P. *Mechanical Systems, Classical Models*. Vol. 1, Springer, 2007.

TODD, D. *Walking Machines: An Introduction to Legged Robots*. Chapman and Hall, NY, 1985.

TOSY ROBOTICS JSC; *TOPIO_irex2009_01.jpg*. Formato JPEG. 1 fotografia, color. Disponível em < http://topio.tosy.com/gallery/TOPIO_irex2009_01.jpg>. Acesso em 05 jan. 2012.

VARGAS, J. E.; "Control System of a Quadruped Walking Robot", *Instrumentation and Development*, vol. 3, nº 4, 1994.

WALDRON, K.; MC GHEE, R.; "The Adaptive Suspension Vehicle", *IEEE Control Systems Magazine*, 1986.

WASEDA UNIVERSITY; *WABOT-1-1973.jpg*. Formato JPEG. Disponível em < http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/photo/WABOT-1-1973.jpg>. Acesso em 19 jun. 2010.

WASEDA UNIVERSITY; *WAP-3-1971.jpg*. Formato JPEG. Disponível em < http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/photo/WAP-3-1971.jpg>. Acesso em 19 jun. 2010a.

WEIDERMANN, H.; PFEIFFER, F.; ELTZE, J.; "The Six-Legged TUM Walking Machine". In: *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1994.

WETTERGREEN, D.; THORPE, C.; WHITTAKER, R.; “Exploring Mount Erebus by Walking Robot”, *Robotics and Autonomous Systems*, 1992.

WOERING, I.; *Simulating the “First Steps” of a Walking Hexapod Robot*, Master’s Thesis, Technische University Eindhowen, 2011.

YEAPLE, J. A. *Robot Insects*. Popular Science, Canada, March 1991.

YOUNSE, P.; AGHAZARIAN, H.; “Steerable Hopping Six-Legged Robot”. In: *Proc. of the Space Exploration Technologies*, 2008.

ANEXO A - Fundamentos da Teoria de Lyapunov

A abordagem mais útil e geral para estudar a estabilidade de sistemas não-lineares deve-se ao matemático russo Alexandr Lyapunov e data do século XIX. Seu trabalho propôs dois métodos de análise: o método da linearização e o método direto. O primeiro trata do estudo da estabilidade local próximo ao ponto de operação do sistema não-linear, enquanto que o segundo método, que não é restrito ao movimento local, consiste no estudo da estabilidade através da construção de uma função variável no tempo.

Este anexo tratará somente os conceitos relativos ao segundo método de Lyapunov, ou método direto, e será dado enfoque específico a sistemas não-autônomos (que dependem do tempo). As definições e teoremas apresentados abaixo são fundamentais para o entendimento da teoria de Lyapunov e podem ser encontradas, com maiores riquezas de exemplos e detalhes em KHALIL (1996), KELLY (2005), SLOTINE (1991) e LEWIS (2004).

A.1. Definições de estabilidade

Definição A.1. Um sistema dinâmico não-linear e não-autônomo pode ser representado por um conjunto de equações não-lineares da forma

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = f\left(\underset{\sim}{x}, t\right) \tag{A.1}$$

onde $\left[f\right]_{n\times 1}$ é uma função vetorial, $\left[\underset{\sim}{x}\right]_{n\times 1}$ é o vetor de estados e t é o tempo.

Definição A.2. Um vetor constante $\underset{\sim}{x} \in R^n$ é um *ponto de equilíbrio*, ou um *estado de equilíbrio* do sistema, se

$$f\left(\underset{\sim}{x}, t\right) = \underset{\sim}{0}, \ \forall t \geq 0 \tag{A.2}$$

Definição A.3. A origem é um *equilíbrio estável* da Eq. A.1, no sentido de Lyapunov, se para todo $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existir $\delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right) > 0$ tal que

$$\left\|\underset{\sim}{x}\left(t_0\right)\right\| < \delta \ \Rightarrow \ \left\|\underset{\sim}{x}\left(t\right)\right\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{A.3}$$

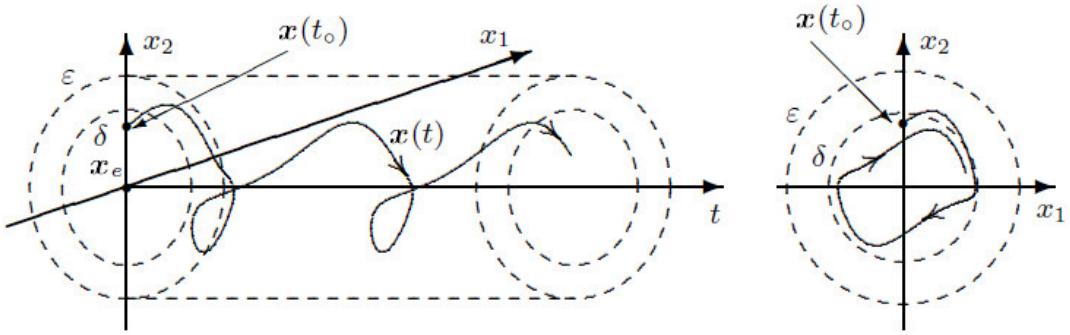


Figura A.1 - Noção de estabilidade (KELLY, 2005).

Definição A.4. A origem é dita *uniformemente estável* se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, independente de t_0, tal que A.3 seja satisfeita.

Definição A.5. A origem é um equilíbrio *assintoticamente estável* se, além de ser estável, existir $\delta' = \delta'(t_0) > 0$ tal que:

$$\left\| \underset{\sim}{x}(t_0) \right\| < \delta' \Rightarrow \left\| \underset{\sim}{x}(t) \right\| \to \underset{\sim}{0} \text{ quando } t \to \infty \tag{A.4}$$

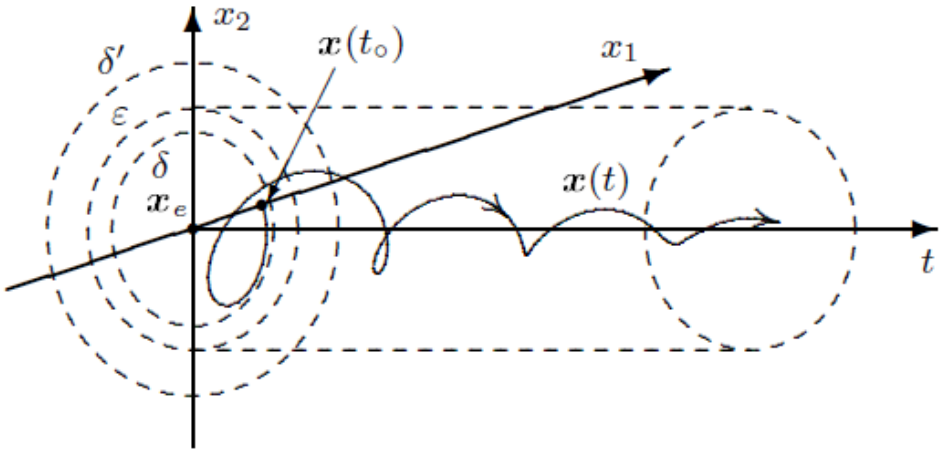


Figura A.2 - Estabilidade assintótica (KELLY, 2005).

Definição A.6. A origem é dita *uniformemente assintoticamente estável* se for uniformemente estável e existir $\delta' > 0$, independente de t_0, que satisfaça A.4.

Definição A.7. A origem é dita *uniformemente assintoticamente estável globalmente* se:

(i) é uniformemente estável e $\delta(\varepsilon) \to \infty$, quando $\varepsilon \to \infty$;

(ii) para todo $\underset{\sim}{x}(t_0)$, $\left\|\underset{\sim}{x}(t)\right\| \to 0$ quando $t \to 0$, independentemente de t_0.

A.2. Funções de Lyapunov

Definição A.8. Seja W uma função contínua. Então,

(i) $W : R^n \to R_+$ é dita *localmente definida positiva* se $W(\underset{\sim}{0}) = 0$ e $W(\underset{\sim}{x}) > 0$ para valores pequenos de $\|\underset{\sim}{x}\| \neq 0$.

(ii) $W : R^n \to R$ é dita *globalmente definida positiva* (negativa) se $W(\underset{\sim}{0}) = 0$ e $W(\underset{\sim}{x}) > 0$ $\left(W(\underset{\sim}{x}) < 0\right)$ para $\forall \underset{\sim}{x} \neq 0$.

(iii) $W : R^n \to R$ é dita *radialmente ilimitada*, se $W(\underset{\sim}{x}) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

(iv) $W : R^n \times R_+ \to R$ é *decrescente* se existe uma função $T : R^n \to R_+$ definida positiva tal que $W(\underset{\sim}{x}, t) \leq T(\underset{\sim}{x})$, $\forall \underset{\sim}{x} \in R^n$.

De acordo com o exposto acima e com a Definição IV.4, pode-se concluir que uma função quadrática $f : R^n \to R$, da forma

$$f = \underset{\sim}{x}^T \cdot P \cdot \underset{\sim}{x}$$

é definida positiva se, e somente se, $[P]_{n \times n}$, também for definida positiva.

Definição A.9. Uma função $V(\underset{\sim}{x}, t)$ é dita *função candidata de Lyapunov* para a origem do sistema definido pela Eq. A.1 se for localmente definida positiva e suas derivadas parciais com respeito às variáveis de estado e ao tempo forem contínuas.

Definição A.10. Uma função candidata de Lyapunov $V(\underset{\sim}{x}, t)$ é uma *função de Lyapunov* se a sua derivada total no tempo ao longo das trajetórias da Eq. A.1 satisfaz

$$\dot{V}(\underset{\sim}{x}, t) \leq 0$$

para valores pequenos de $\|\underset{\sim}{x}\|$.

A.3. Método direto de Lyapunov

Dentre os diversos resultados existentes sobre a teoria de Lyapunov, o mais importante para este trabalho é o teorema da *Estabilidade Assintótica Global,* enunciado a seguir.

Teorema A.1. (Estabilidade Assintótica Global): A origem da Eq. A.1 é globalmente assintoticamente estável se existe uma função candidata de Lyapunov $V(\underset{\sim}{x},t)$, radialmente ilimitada, globalmente definida positiva, tal que sua derivada no tempo seja globalmente definida negativa.

FAULHABER

DC-Micromotors

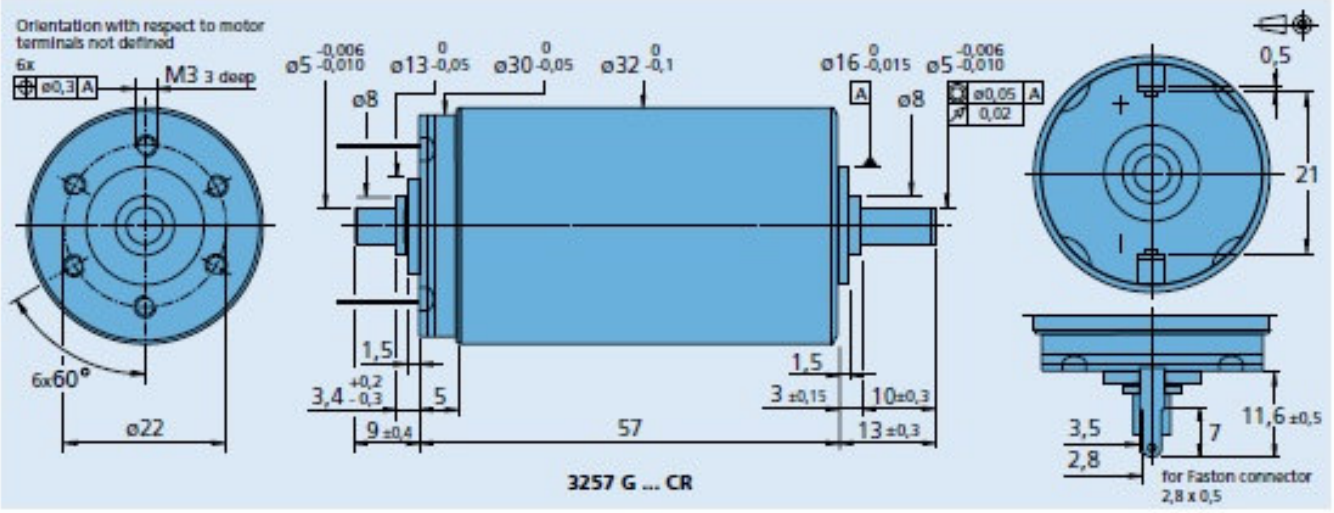
Graphite Commutation

70 mNm

For combination with
Gearheads:
32/3, 32/3 S, 32A, 38/1, 38/1 S, 38/2, 38/2 S, 38A
Encoders:
HEDL 5540, HEDM 5500, HEDS 5500, HEDS 5540, IE2-1024, IE2-16, IE3-1024, IE3-1024 L

Series 3257 ... CR

		3257 G		012 CR	024 CR	048 CR	
1	Nominal voltage	U_N		12	24	48	V
2	Terminal resistance	R		0,41	1,63	6,56	Ω
3	Output power	$P_{2\,max.}$		79,2	83,2	84,5	W
4	Efficiency, max.	$\eta_{max.}$		83	83	83	%
5	No-load speed	n_0		5 700	5 900	5 900	rpm
6	No-load current (with shaft ø 5 mm)	I_0		0,258	0,129	0,064	A
7	Stall torque	M_H		531	539	547	mNm
8	Friction torque	M_R		4,9	4,9	4,9	mNm
9	Speed constant	k_n		500	253	125	rpm/V
10	Back-EMF constant	k_E		2	3,95	7,98	mV/rpm
11	Torque constant	k_M		19,1	37,7	76,2	mNm/A
12	Current constant	k_I		0,052	0,027	0,013	A/mNm
13	Slope of n-M curve	Δn/ΔM		10,7	10,9	10,8	rpm/mNm
14	Rotor inductance	L		70	270	1 100	µH
15	Mechanical time constant	τ_m		4,7	4,7	4,7	ms
16	Rotor inertia	J		42	41	42	gcm²
17	Angular acceleration	$\alpha_{max.}$		130	130	130	$\cdot 10^3$rad/s²
18	Thermal resistance	R_{th1} / R_{th2}	2 / 8				K/W
19	Thermal time constant	τ_{w1} / τ_{w2}	17 / 810				s
20	Operating temperature range:						
	– motor		-30 ... +125				°C
	– rotor, max. permissible		+155				°C
21	Shaft bearings		ball bearings, preloaded				
22	Shaft load max.:						
	– with shaft diameter		5				mm
	– radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		50				N
	– axial at 3 000 rpm		5				N
	– axial at standstill		50				N
23	Shaft play						
	– radial	≤	0,015				mm
	– axial	=	0				mm
24	Housing material		steel, black coated				
25	Weight		242				g
26	Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face				
Recommended values - mathematically independent of each other							
27	Speed up to	$n_{e\,max.}$		5 000	5 000	5 000	rpm
28	Torque up to	$M_{e\,max.}$		70	70	70	mNm
29	Current up to (thermal limits)	$I_{e\,max.}$		4,6	2,3	1,15	A



3257 G ... CR

For notes on technical data and lifetime performance refer to "Technical Information".

Edition 2011 – 2012

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG
Specifications subject to change without notice.

www.faulhaber.com

FAULHABER

Planetary Gearheads

7 Nm

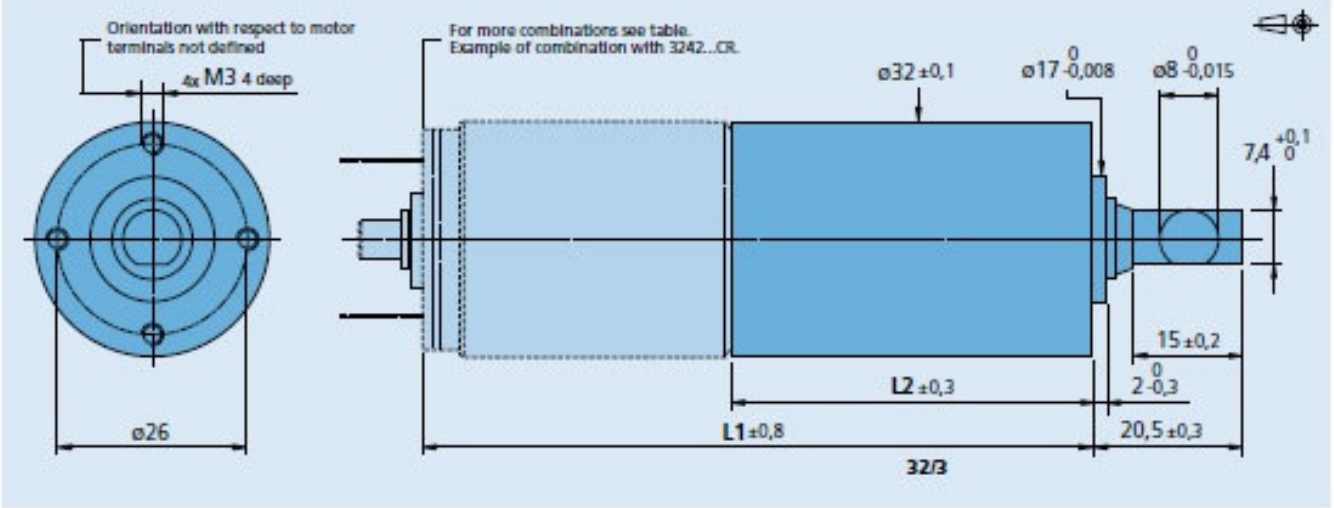
For combination with
DC-Micromotors
Brushless DC-Motors

Series 32/3

	32/3
Housing material	metal
Geartrain material	plastic/steel
Recommended max. input speed for:	
– continuous operation	4 000 rpm
Backlash, at no-load	≤ 1 °
Bearings on output shaft	ball bearings, preloaded
Shaft load, max.:	
– radial (10 mm from mounting face)	≤ 200 N
– axial	≤ 200 N
Shaft press fit force, max.	≤ 250 N
Shaft play	
– radial (10 mm from mounting face)	≤ 0,03 mm
– axial	≤ 0,15 mm
Operating temperature range	- 20 ... + 125 °C

Specifications										
Number of gear stages		1	2	3	3	4	4	4	5	5
Continuous torque	Nm	4,2	0,4	1,4	2	4	4,9	5,8	7	7
Intermittent torque	Nm	5,3	0,6	1,9	2,6	5,2	6,5	8	10	10
Weight without motor, ca.	g	160	190	230	230	260	260	260	290	300
Efficiency, max.	%	88	80	70	70	60	60	60	55	55
Direction of rotation, drive to output		–	–	–	–	–	–	–	–	–
Reduction ratio [1] (rounded)		**3,71:1**	**14:1**	**43:1**	**66:1**	**134:1**	**159:1**	**246:1**	**415:1 592:1 989:1**	**1 526:1**
L2 [mm] = length without motor		33,9	41,6	49,4	49,4	57,2	57,2	57,2	65,0	65,0
L1 [mm] = length with motor	3242G...CR	75,9	83,6	91,4	91,4	99,2	99,2	99,2	107,0	107,0
	3257G...CR	90,9	98,6	106,4	106,4	114,2	114,2	114,2	122,0	122,0
	3557K...CS	90,9	98,6	106,4	106,4	114,2	114,2	114,2	122,0	122,0
	3242G...BX4	78,1	85,8	93,6	93,6	101,4	101,4	101,4	109,2	109,2
	3268G...BX4	104,1	111,8	119,6	119,6	127,4	127,4	127,4	135,2	135,2
	3564K...B	97,9	105,6	113,4	113,4	121,2	121,2	121,2	129,0	129,0

[1] The reduction ratios are rounded, the exact values are available on request or at www.faulhaber.com.



For notes on technical data and lifetime performance refer to "Technical Information".

Edition 2011 – 2012

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG
Specifications subject to change without notice.

FAULHABER

Encoders

Optical Encoders

Features:
100 to 1024 Lines per revolution
2 or 3 Channels
Digital output

Series 5500, 5540

		HEDS 5500	HEDS 5540	HEDM 5500	
Lines per revolution	N	100 - 500	100 - 500	1 000 -1 024	
Signal output, square wave		2	2+1 Index	2	channels
Supply voltage	V_{CC}	4,5 ... 5,5			V DC
Current consumption, typical (V_{CC} = 5 V DC)	I_{CC}	17	57	57	mA
Pulse width	P	180 ± 45	180 ± 35	180 ± 45	°e
Phase shift, channel A to B	Φ	90 ± 20	90 ± 15	90 ± 15	°e
Logic state width	S	90 ± 45	90 ± 35	90 ± 45	°e
Cycle	C	360 ± 5,5	360 ± 5,5	360 ± 7,5	°e
Signal rise/fall time, typical	tr/tf	0,25 / 0,25			µs
Frequency range [1]	f	up to 100	up to 100 [2]	up to 100	kHz
Inertia of code disc	J	0,6			gcm²
Operating temperature range		– 40 ... + 100		– 40 ... + 70	°C

[1] Velocity (rpm) = f (Hz) x 60/N
[2] HEDS 5540 requires pull-up resistors of 2,7 kΩ between pins 2, 3, 5 and 4 (V_{CC})

Ordering Information

Encoder type	number of channels	lines per revolution	For combination with:
HEDS 5500 C	2	100	DC-Micromotors and DC-Motor-Tachos
HEDS 5500 A	2	500	Series
HEDS 5540 C	2+1	100	2230, 2233, 2251
HEDS 5540 A	2+1	500	2342
HEDM 5500 B	2	1000	2642, 2657
HEDM 5500 J	2	1024	3242, 3257, 3557, 3863
			brushless DC-Servomotors
			Series
			2036, 2057, 2444, 3056, 3564

Interlocking connector options: extension cables 300 mm length, on request.

Features

These incremental shaft encoders in combination with the DC-Micromotors and brushless DC-Servomotors are designed for the indication and control of both shaft velocity and direction of rotation as well as for positioning.

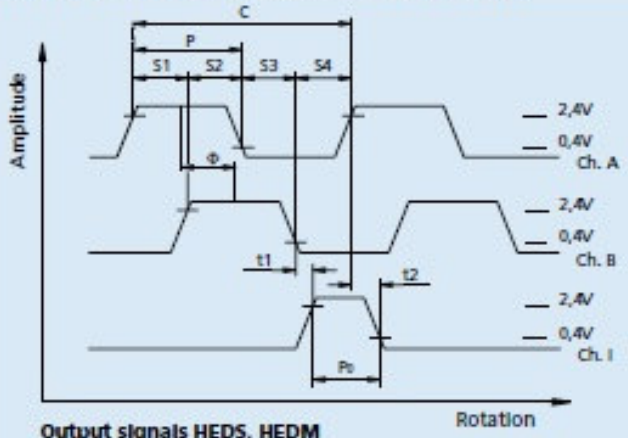
A LED source and lens system transmits collimated light through a low inertia metal disc to give two channels with 90° phase shift.

The single 5 volt supply and the two or three channel digital output signals are interfaced with a 5-pin connector.

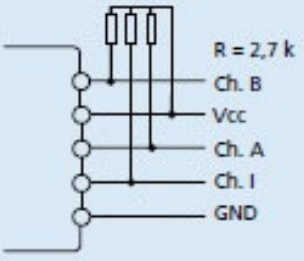
Motors with ball bearings are recommended for continuous operation at low and high speeds and for elevated radial shaft load.

Details for the Motors and suitable reduction gearheads are on separate catalogue pages.

Output signals / Circuit diagram / Connector Information

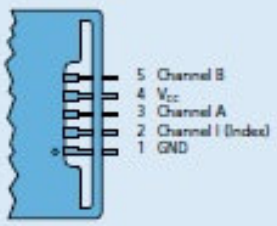


Output signals HEDS, HEDM
with clockwise rotation as seen from the shaft end



Connection diagram
HEDS 5540 requires pull-up resistors

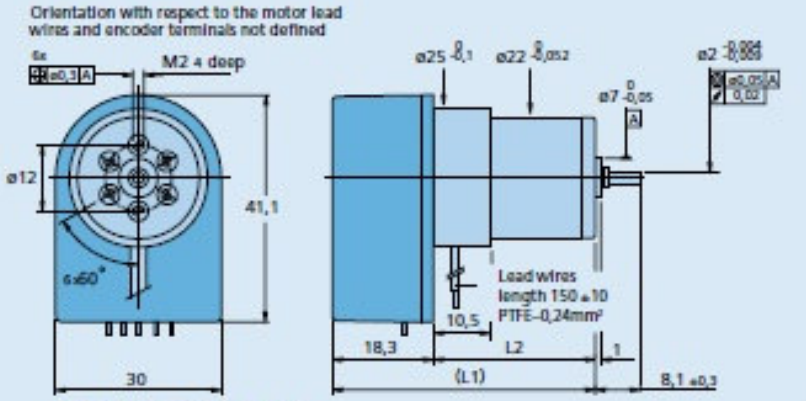
Pin Function



Connector
suggested connectors
AMP 103686-4/640442-5,
Molex 2695/2759
FCI 65039-032 / 4825x-000

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG
Specifications subject to change without notice.
www.faulhaber.com

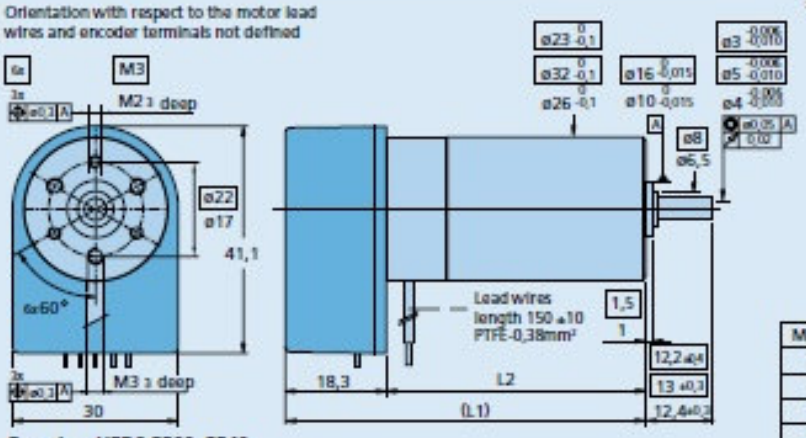
scale reduced



Motor type	L1	L2
2230	52,8	34,5
2233	55,6	37,3

Encoders HEDS 5500, 5540
with DC-Micromotors 2230, 2233

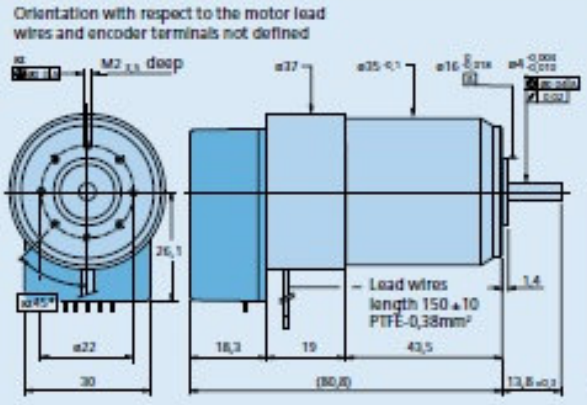
scale reduced



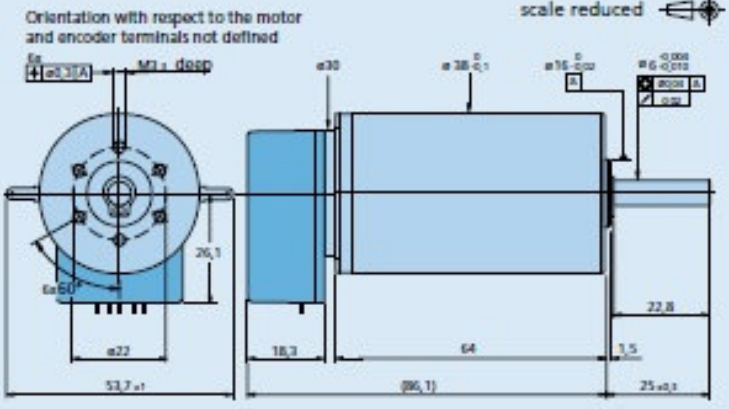
Motor type	L1	L2
2342	63,8	45,5
2642	64,8	46,5
2657	79,8	61,5
3242	65,3	47,0
3257	80,3	62,0

Encoders HEDS 5500, 5540
with DC-Micromotors 2342, 2642, 2657, 3242, 3257

scale reduced



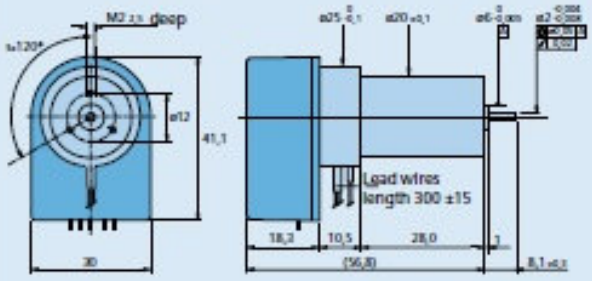
Encoders HEDS 5500, 5540
with DC-Micromotor 3557



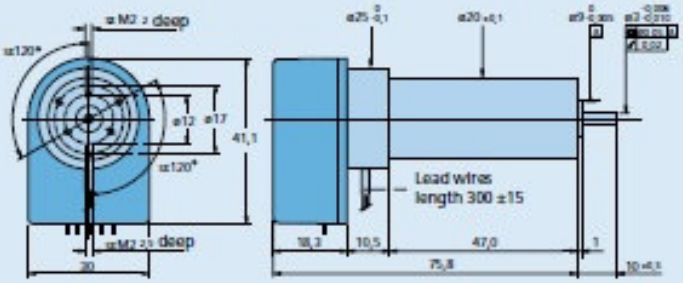
Encoders HEDS 5500, 5540
with DC-Micromotor 3863

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG
Specifications subject to change without notice.
www.faulhaber.com

scale reduced

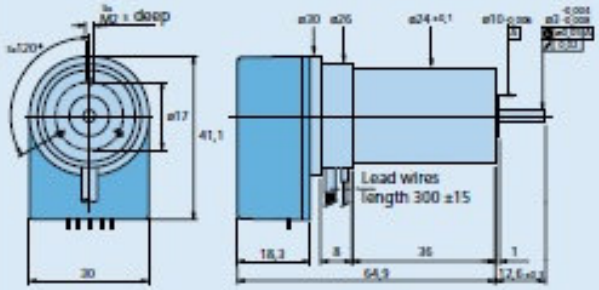


Encoders HEDS 5500, 5540
with Brushless DC-Servomotor 2036 U ... B - K312

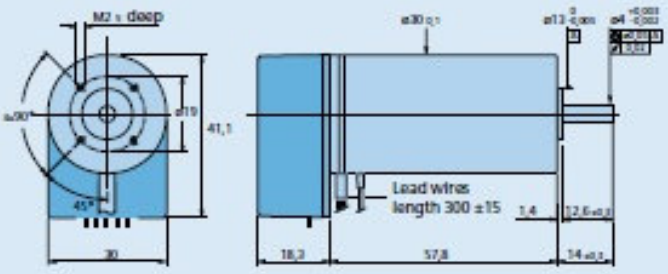


Encoders HEDS 5500, 5540
with Brushless DC-Servomotor 2057 S ... B - K312

scale reduced

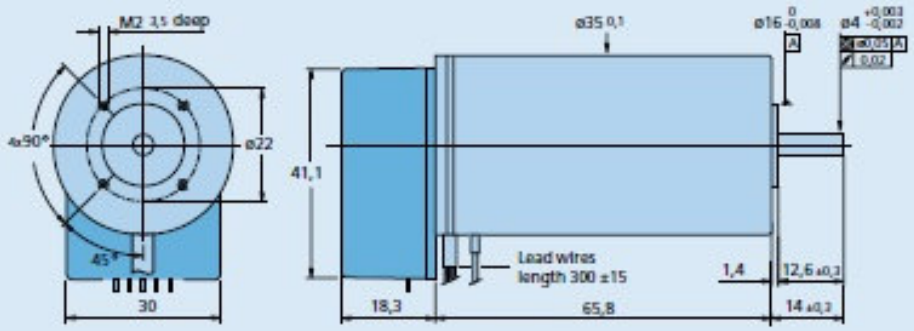


Encoders HEDS 5500, 5540
with Brushless DC-Servomotor 2444 S ... B - K312



Encoders HEDS 5500, 5540
with Brushless DC-Servomotor 3056 K ... B - K312

scale reduced



Encoders HEDS 5500, 5540
with Brushless DC-Servomotor 3564 K ... B - K312

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG
Specifications subject to change without notice.
www.faulhaber.com